Переписка Е. Е. Слуцкого и В. И. Борткевича

К. Виттих (Женева), Г. Раушер (Вена), О. Б. Шейнин (Берлин)

Опубл.: *Финансы и бизнес* № 4, 2007

Мы публикуем сохранившиеся письма из переписки Евгения Евгеньевича Слуцкого (1880 – 1948) и Владислава Иосифовича Борткевича (Ladislaus von Bortkiewicz) (1868 – 1931), которые хранятся в Швеции, в архиве последнего (Uppsala Univ., Manuskript & Musikabteilung, Kapsel 7), недавно обнаруженного Г. Раушером. Слуцкий частично, а Борткевич полностью придерживались прежней системы правописания.

Писем Слуцкого из Москвы после середины 1926 г. не осталось, быть может их и не было. Он, правда, продолжал переписку с другими западными коллегами, например с Рагнаром Фришем, см. Chipman (2004).

Письма Борткевича являлись, видимо, черновиками. Их чтение затруднительно и мы не смогли разобрать некоторые слова, вместо которых указываем [?]. Далее, он зачеркнул многие строки, что в нескольких случаях осталось сомнительным, а многие слова выписывал сокращенно. В письмах Слуцкого много подчеркиваний (которые мы выделили курсивом), притом иногда крайне небрежно, видимо, Борткевичем и в таких случаях они подчеркнуты нами без применения курсива.

Среди других тем Слуцкий останавливался на логической и философской сторонах статистики, и есть смысл вспомнить свидетельство Четверикова (1959/1975, с. 272):

В середине 40-х годов Е. Е. Слуцкий даже с некоторым раздражением отказывался обсуждать чисто логические концепции, хотя и не мог пройти мимо модной в те годы критики Р. Фишером проблемы исчисления вероятности гипотез (теоремы Бейеса).

В письмах Слуцкого из Киева, а затем из Москвы он неизменно указывал свой почтовый адрес, а именно Нестеровская 17, кв. 8 и Машкова 17/15 (т. е. у Н. С. Четверикова, см. Письмо № 7, см. о нем Прим. 18) соответственно.

Было известно, что Борткевич переписывался со Слуцким, поскольку последний воспринял термин своего старшего коллеги (Письмо № 3), однако об их регулярной переписке сведений не было, и лишь недавно мы узнали о его переписке с М. В. Птухой и Н. С. Четвериковым (Борткевич и Чупров 2005, с. 10), см. также Прим. 25. Заметим еще, что Борткевич, прожив примерно 30 лет в Германии (не считая примерно семи лет до 1897 г.), вообще не порвал своих отношений с Россией (Борткевич и Чупров 2005, с. 9 – 12)

Вот выдержка из письма Чупрова Борткевичу 13.2. 1923 г. из Дрездена (там же, с. 250), которое, видимо, и обусловило переписку Борткевича со Слуцким:

На днях получил письмо от Птухи. […] *Получил я также письмо Евг. Евг. Слуцкого из Киева же. Он побывал в Москве на стат. съезде, узнал там от Четв. мой адрес. Сообщает, между прочим, что на съезде один математик из Средней Азии* [Борткевич заметил здесь: Романовский] *прочел доклад, в котором сходными путями получает некоторые из тех* *результатов, что я опубликовал в Биометрике. Занятно! Хорошо было бы, если бы мог послать Сл. кое-что из твоих оттисков, в особенности Хомогенитет. Он сейчас снова вернулся к мат. стат. Курс читает и сам работает в этой области. Очень плачется на отсутствие свежей литературы. Выслать ему можно было бы через родственника его N. Wolodkewitsch, Parkstrasse 4* [?] *Berlin-Südende*[1].

The Correspondence between E. E. Slutsky and V. I. Bortkevich
Guido Rauscher (Vienna), Oscar Sheynin (Berlin),
Claus Wittich (Geneva)

We publish the extant letters of the correspondence between Evgeny Evgenievich Slutsky (1880 – 1948) and Vladislav Iosifovich Bortkevich, or Ladislaus von Bortkiewicz (1868 – 1931) that constitutes a part of the latter's posthumous archive kept at the Manuskript & Musik Abteilung of the Library of Uppsala University, Kapsel 7 (Sweden) and recently discovered by Guido Rauscher. Slutsky partly, and Bortkiewicz completely adhered to the (Russian) system of spelling drastically changed in 1917 – 1918. It is perhaps noteworthy that there are no extant letters written by Slutsky from Moscow after mid-1926, – when the political situation in Russia began to worsen drastically and his own circumstances became precarious (Sheynin 1999/39, p. 129). True, he did continue to correspond with Western colleagues such as Ragnar Frisch, see Chipman (2004/42).

Bortkiewicz' letters are obviously drafts. Their reading is difficult and we were unable to decipher some words; such cases are denoted by [?]. Then, he crossed out many lines, sometimes not clearly enough and in many cases did not write out words completely. Some words and expressions in Slutsky's letters are underlined (here italicized), but there are cases when this was done very crudely, most likely by Bortkiewicz, and we have underlined rather than italicized the relevant words and expressions.

Among other topics, Slutsky dwelt on logical and philosophical issues connected with statistics, and it is opportune to note (Chetverikov 1959/32, p. 272/ 2005, p. 158) that in the mid-1940s he

> *even with some irritation refused to discuss purely logical concepts although he had been unable to disregard the then topical criticism levelled by Fisher against the problem of calculating the probabilities of hypotheses* (*of the Bayes theorem*).

In his letters, first from Kiev, then from Moscow, Slutsky invariably indicated his address: Nesterovskaia St. 17, flat 8, and Mashkov St. 17/15 (by N. S. Chetverikov, Chuprov's closest student), respectively.

Bortkiewicz is known to have corresponded with Slutsky since the latter (Letter No. 3) had adopted a term suggested by his colleague. That they exchanged letters from time to time was not, however, ascertained, and only recently Bortkiewicz' correspondence with Ptucha and Chetverikov came to light (Bortkevich & Chuprov 2005/12, p. 10), also see Note 25. Actually, although having lived in Germany for 30 years (and about seven years before 1897), Bortkiewicz had retained ties with Russia (Sheynin 2001/40, p. 228; Bortkiewicz & Chuprov 2005/12, pp. 9 – 12).

Here is an excerpt from a letter of Chuprov to Bortkiewicz of 13.2.1923 from Dresden (Ibidem, p. 250) which apparently led to the correspondence between the latter and Slutsky:

I have recently received a letter from Ptucha. […] *I also received a letter from Evg. Evg. Slutsky, again from Kiev. He had been in Moscow, attended the stat. conference, and obtained there my address from Chetv. He tells me, among other things, that a mathematician from Central Asia* [Bortkiewicz remarked here: Romanovsky] *read out a report in which he arrived in a similar way at some of my results which I had published in Biometrika. Amusing! It would be good if you will be able to send him some of your reprints, and especially Homogenität etc. He has again returned to math. stat. Delivers a course and is working himself in that field. Laments the absence of recent literature. It would be possible to send them through his relative N. Wolodkewitsch, Parkstrasse 4* [?] *Berlin-Südende*[1].

Письмо № 1, Слуцкий – Борткевич, 20.7.1923, Киев

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Я получил две Ваши работы (1) Homogenität [1918]и (2) Die Variationsbreite (перв. часть) [1921] и спешу поблагодарить Вас. Присылкой вашей Вы оказали мне истинное благодеяние: я читаю здесь в Институте народного хозяйства теоретическую статистику, а Вы от М.В. Птухи знаете, какое у нас отсутствие новейшей литературы.

Хотелось бы надеяться, что, если я буду просить Вас о присылке оттисков Ваших дальнейших работ, я не слишком злоупотреблю Вашей добротой. Между прочим мне очень важно было бы иметь Вашу статью Das Laplacesche Ergänzungsglied und Eggenbergers Grenzberichtigung [1920], т.к. я очень заинтересован этой темой. Мне самому удалось недавно между прочим найти одно разложение гипергеометрического ряда по некоторым параметрам; к сожалению, не знаю ново ли оно.

Посылаю Вам оттиск моей статьи в *Вестнике Статистики*[2], примите его в знак моей благодарности и глубокого уважения от искренне преданного Вам Е. Слуцкого. 17.7.1923

P.S. Не могу отказать себе в удовольствии сообщить Вам решение маленькой задачи, на которую натолнул меня один биолог. Он спрашивал меня о вероятности случайного сопряжения одинаковых хромосом в образуемом ими кольце. Оказалось, что эта задача представляет собой изящную иллюстрацию закона малых чисел[3].

Если $2S$ элементов расположены случайно в кольцо, причем среди них имеется s пар одинаковых элементов aa, bb, ..., ll, то пусть $\Pi_{m,s}$ будет вероятность того, что m элементов случайно расположатся рядом с другими m однородными элементами, а остальные элементы будут стоять рядом с неоднородными. Тогда

$$\Pi_{m,s} = \frac{2s}{m(2s-1)}\left(\frac{2s-(m+1)}{2s-2}\Pi_{m-1,s-1} + \frac{m}{2s-2}\Pi_{m,s-1}\right) \qquad (1)$$

и

$$\Pi_{m,s} = \frac{1}{(2s-1)(2s-2)}\{2[2s-(m+1)]\,\Pi_{m-1,s-1} +$$

$\{[2s - (m + 2)][2s - (m + 3)] + 2m\}\Pi_{m,s-1} +$

$2(m + 1)[2s - (m + 3)]\Pi_{m+1,s-1} + (m + 2)(m + 1)\Pi_{m+2,s-1}\}$. (2)

Каждая из этих рекурсионных [рекуррентных] формул дает возможность найти поледовательно нужные вероятности исходя из $\Pi_{2,2}$ = 2/3, $\Pi_{1,2} = 0$, $\Pi_{0,2} = 1/3$. Увеличивая же s беспредельно, находим, что в пределе

$\lim \Pi_{m,s} = \lim \Pi_{m,s-1}$ (формула 2),

$\lim \Pi_{m,s} = (1/m)\lim \Pi_{m-1,s}$ (формулы 1 и 2).

Следовательно, если $\lim \Pi_{m,s} = \Pi_m$, $s = \infty$, то

$\Pi_1 = \Pi_0$, $\Pi_2 = (1/2)\Pi_1$, $\Pi_3 = (1/2\cdot3)\Pi_2$ и т.д., откуда $\Pi_m = (1/m!)e^{-1}$, –

частный случай закона малых чисел.

Из (1) и (2) нетрудно найти и приближенные выражения для Π_m и Π_{m-1}, а затем и для Π_0, показывающие насколько быстро выроятности подходят к своему пределу. Именно, имеем

$\Pi_{m,s} = (1/m)\{1 + [(3 - m)/2s] + [(10 - 4m)/(2s)^2] + \ldots\}\Pi_{m-1,s}$ (3)

$\Pi_{0,s} = e^{-1} - (0.5518/2s) - [0.8124/(2s)^2] + \ldots$ (4)

Числа еще не подвергались окончательной проверке, но вот результат для $s = 6$:

	Приближенно	Точно
$\Pi_{0,6}$	0.316	3326/10395 = 0.320
$\Pi_{1,6}$	0.382	3948/10395 = 0.380
$\Pi_{2,6}$	0.210	2190/10395 = 0.211
$\Pi_{3,6}$	0.069	740/10395 = 0.071
$\Pi_{4,6}$	0.015	165/10395 = 0.016
$\Pi_{5,6}$	0.002_3	24/10395 = 0.002_3
$\Pi_{6,6}$	0.000_2	2/10395 = 0.000_2
	0.994_5	1

К сожалению, не знаю, не была ли уже решена и эта задача[4].

Позвольте еще раз поблагодарить Вас: Вы не в состоянии представить себе как Вы обрадовали меня Вашей присылкой.

Глубоко уважающий Вас Е. Слуцкий

Письмо №2, Борткевич – Слуцкий. Берлин, 31.7.1923

Многоуважаемый Евгений Евгеньевич!

Благодарю Вас очень за оттиск Вашего доклада [1922] и за письмо [№ 1] от 20го т.м. [текущего месяца] . Я вполне с Вами согласен, что теория вероятностей как отрасль чистой математики должна строиться совершенно независимо от логических вопросов, связанных с понятием вероятности в собственном смысле, но не отрицаю, что от перемены названия можно многого ожидать. Ваша конструкция как будто примыкает к конструкции Ф.А. Ланге (*Logische Studien* [2. Aufl. Iserlohn, 1894]), который исходит из понятия разделительного суждения (Disjunktionsurteil).

Мне было приятно констатировать, что Вы отрицаете отождествление вероятности с предельной частостью. Об этом пункте Вы найдете кое-что в моей рецензии [1923] на Keynes'а *Treatise on Probability*, которую я Вам вчера выслал вместе с тремя другими оттисками. К сожалению, я вынужден просить Вас при случае вернуть мне по почте как рецензию на Keynes'а, так и статью о Laplace – Eggenberger [1920]. Variationsbreite und mittl. Fehler [1921] до известной степени может служить суррогатом 2-й части статьи Die Variationsbreite beim Gaußschen Fehlergesetz [1922a] […]. Вследствие разногласий между издателем и типографией я вовсе не получил отдельных оттисков этой статьи.

В свое время я отправил М.В. Птухе свою статью Der mittl. Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten [1918]. Сожалею, что все оттиски кроме одного израсходованы. Там Вы найдете в выносках на стр. 108 – 110 замечания принципиального характера, которые может быть представят для Вас некоторый интерес[5]. За последнее время появились 1) [E.] Czuber, *Die philosophischen Grundlagen der Wahrsch. Rechnung*. Leipzig, Teubner, 1923, 343 стр. небольшого формата и 2) F.M. Urban, *Grundlagen der Wahrsch*[*einlichkeits*]*rechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig, Teubner, 1923.

Если увидите М.В. Птуху, то поблагодарите его, пожалуйста, от меня за присылку 4 экз. его таблицы см[ертности] для Украины[6].

Ваша задача и ее решение очень занятны. Мне неизвестно, чтобы до Вас кто-нибудь ей занимался. Пока я еще не совсем разобрался в исходных формулах не имея времени хорошенько в них вникнуть. Их соотношение и коэффициенты при $\Pi_{m-1,s-1}$ в 1-й формуле мне не вполне понятны. Формула же

$$\Pi_m = (1/m!)e^{-1}$$

получается очень просто и прямым путем. Матем. ожидание числа m равняется

$$s\cdot 2s\cdot(1/2s)\cdot[2/(2s-1)] = 2s/[2s-1)].$$

При $s = 2$ имеем $2\cdot\Pi_{2,2} + 1\cdot\Pi_{1,2} + 0\cdot\Pi_{0,2} = 4/3$.
При $s = 6$: $0\cdot 0.320 + 1\cdot 0.380 + \ldots + 6\cdot 0.0002 = 1.091 = 12/11$,

$$\lim\,[2s/(2s-1)] = 1,\ s = \infty.$$

А вероятность, что редкое явление, коего мат. ож. = 1, случится m раз, и есть $(e^{-1}/m!)$.

Я думаю, что проф. Мизес [автор частотной теории вероятностей] не откажется напечатать статью об этой задаче, если Вы ее ему пришлете.

Искренне Вас уважающий В. Борткевич

Прилагаю адрес Мизеса

Письмо № 3, Слуцкий – Борткевич. Киев, 25.9.1923

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Извините, что задержался с ответом на Ваше такое любезное и сердечное письмо, но я был выше головы занят последние недели, а Вам хотелось написать не спеша. Впрочем я и получил Ваше письмо всего недели четыре назад, возвратившись в Киев из деревни, где провел часть лета.

Не могу сказать, как я благодарен Вам за присылку Ваших статей о Лапласе – Эггенберг[ер]е, о Helmert'е, о Кэйнсе и Variationsbreite [1920; 1922; 1923; 1921] – все это для меня чрезвычайно интересно. Сейчас я уезжаю на три недели в командировку в Москву с научной целью – поработать в библиотеках, а по возвращении первым делом сделаю необходимые выписки из тех статей, которые Вы просили возвратить (Лаплас – Эггенб. и Кэйнс) и немедленно вышлю Вам.

Ваш термин *разделительное исчисление* мне очень нравится – это мне не пришло в голову, а теперь кажется таким естественным. Конечно, название вещь второстепенная, но это не значит, что неважная, недаром из-за одной іоты бывало столько событий – *имя* – великое дело как сказал бы мистик и метафизик. Впрочем, это вероятно еще музыка будущего, хотя то преобразование исчисления вероятностей, которое мне грезилось, может быть и не за горами, может быть я увижу еще и под Вашим пером в печати Ваше Disjunktionsrechnung [разделительное исчисление].[7]

Относительно той задачи, что я писал Вам, я воспользуюсь с благодарностью Вашим добрым советом – послать Mises'у как только успею обработать статью для печати.

Летом я сделал 3000 испытаний, для каждой тысячи варьируя условия. Мне было любопытно узнать, влияют ли размер и форма телец перетряхиваемых вместе и располагающихся затем в кольцо на равновероятность всех комбинаций. Я употреблял круглую коробку с куполообразным возвышением на дне, так что мои фасолинки должны были сами собой ложиться циклически. До опыта я думал, что различия формы и величины не будут иметь значения, но оказалось, что это не совсем так. Когда я взял резко различные фасолинки: две очень маленьких круглых, две побольше совсем плоских, две еще больше продолговатых округлых и 4 почти шарообразных, то получились отклонения от теории совершенно несомненные (два эксперимента по 1000 с этим набором). Но третья тысяча, которую я проделал с фасолинками *приблизительно* одинаковой формы, хотя и отличавшимися по размерам гораздо больше друг от друга чем те кости, с которыми проделывались эксперименты по теории вероятностей, так эта тысяча дала замечательное совпадение с теорией.

Вообще я думаю, что при моей постановке эксперимента действительно форма и величина телец должны сказываться на результатах испытаний гораздо меньше, чем при других постановках, о которых пришлось узнать. Между прочим, мне никогда не приходилось ни слышать, ни читать, чтобы для *экспериментов по теории вероятностей* употреблялись автоматические саморегистрирующие приспособления. А мне кажется, что если такие эксперименты могут иметь научный интерес, то следовало бы поставить их вне зависимости от терпения исследователя, которое искушается ими очень жестоко, как я сужу по себе.

Я трусил свою коробку и изобретал от скуки машину, которая могла бы меня заменить; мне кажется, что мне это удалось (в схематической конечно форме): машина могда бы трусить, машина могда бы считать. Для задачи Бюфона [Бюффона][8] тоже кажется нетрудно было бы устроить такой саморегистрирующий аппарат.

Что касается теории моей задачи, то я не писал вывода формул не желая обременять Вас соображениями, которые могли бы быть Вам совершенно неинтересны. Сейчас я тоже боюсь слишком затянуть письмо, но так как Вы хотели по-видимому, как я понял, знать как мои формулы получены, то я рискую рассказать вкратце идею вывода (весь вывод подробно я не рискую Вам посылать т.к. это слишком длинно).

Если обозначить определенную относительную последовательность элементов как комбинацию, число всех возможных комбинаций из s пар – N_s и число тех из них, которые имеют m соединенных пар, через $N_{m/s}$, то

$$N_s = (2s - 1)!,\ P_{m/s} = N_{m/s}/(2s - 1)!.$$

Пусть $N'_{m/s}$ – число комбинаций с участием какой-либо определенной пары в определенном порядке лежащих элементов, напр. a_1a_2 или b_2b_1 и т.д. Если мы составим полный перечень всех комбинаций с a_1a_2, потом с a_2a_1, потом с b_1b_2 и т.д., то мы получим $2sN'_{m/s}$ случаев, среди которых, как легко видеть, каждая комбинация будет встречаться m раз. Поэтому

$$N_{m/s} = (2s/m)\, N'_{m/s}.$$

Найдем $N'_{m/s}$. Каждая комбинация с a_1a_2, напр., может принадлежать только к одному из двух типов $b_1a_1a_2b_2$ или $b_1a_1a_2c_1$. В первом случае, исключив aa, получим комбинацию из m же соединений, а во втором – только из $m - 1$. Из каждой комбинации $s - 1$ пары с $m - 1$ соединением может получиться комбинация из s пар с m соединениями путем включения aa в любой промежуток, кроме промежутков между соединенными элементами, т.е. $2s - 2 - (m - 1) = 2s - (m + 1)$ способами. Из каждой же комбинации из $s - 1$ пары с m соединениями может получиться комбинация из s пар с m соединениями только путем включения aa в один из промежутков между соединенными элементами, т.е. m способами. След.,

$$N'_{m/s} = [2s - (m + 1)]\, N_{m-1/s-1} + mN_{m/s-1}.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу и заменив каждое N через P, напр., $N_{m/s-1}$ через $P_{m/s}(2s - 1)!$ и т.д., мы и получим первую из моих формул.

Вывод другой настолько длинен, что я не рискую его сообщать. Суть его в том, что я предполагаю, что все элементы берутся в определенном порядке, но кладутся случайно и что в кольцо уже брошена $s - 1$ пара, так что остается положить только, скажем, a_1a_2. Я рассматриваю все возможные случаи, из которых может произойти m/s: I) Имеется среди $s - 1$ пары $m - 1$ соединение; II) m; III) $m + 1$; IV) $m + 2$ соединения. В каждом из них нахожу, как должны упасть a_1 и a_2, чтобы получилось m соединений из s пар. Например, в IV случае a_1 и a_2 оба должны упасть не рядом и каждое в промежуток между двумя одинаковыми, разбив две пары и не образовав ни одной. Самый вывод затем не представляет трудности.

Простите, что был слишком пространен в сем письме и примите уверение в моей самой искренней преданности.

Глубоко уважающий Вас Е. Слуцкий

Письмо №4, Слуцкий – Борткевич. Киев, 24.2.1924

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Наконец-то удалось мне отправить те две статьи (о Кэйнсе и о Лапласе – Эггенбергере), которые Вы просили вернуть. Еще раз сердечнейшим образом благодарю Вас за них, но, пожалуйста, не пеняйте на меня, что я так задержал их: раньше никак не мог отправить.

Той же заказной бандеролью я отправил вышедшие за это время свои работы: 1) О некотор. схемах корреляционной связи и т.д. [1923], […] 2 экз, 2) О новом коэфф. средн. плотности населения [1923] (5 экз.) […], то же по-украински – напечатано в *Известиях Всеукр. Акад. Наук*). 3) К вопросу о вычисл. дохода государства от эмиссии [1923] (1 экз.) […]. 4) Математические заметки к теории эмиссии [1923] […], 1 экз.

Последняя работа резюмирует предпоследнюю и заканчивает ее на основании неопубликов. материала. No.3 написано по просьбе моего друга проф. Л. [Н.?] Яснопольского как приложение к его работе о денежн. обращ. в эпоху революции; мне пришлось писать ее более спешно, чем я бы хотел и она вышла длиннее, чем надо.

С приездом М.В. Птухи из Германии повеяло живыми впечатлениями с Запада – еще несколько ниточек, восстанавливающих порванную было ткань общения. Появляются книги. Выписываем комплекты журналов за последние 10 лет. Таким образом, через несколько месяцев станем до некоторой степени европейцами.

Кэйнс меня очень заинтересовал; при чтении Вашей статьи было чрезвычайно приятно чувствовать себя солидарным с Вами. Но вот относительно одной частности: я бы не сделал Кэйнсу упрека в *überraschend engherzige Auslegung des Ausdrucks “Form”* [в неожиданном маловажном истолковании выражения *форма*, Bortkiewicz 1923, p. 6]). Если обозначить положение относительно числа (m) комбинаций по k из n элементов данного рода (A) через $F(m; n; k; A)$, то F будет логической функцией переменных m, n, k, A и относительно нее Вы безусловно правы. Но если придать определенные значения, скажем, трем переменным и обозначить

$$F(m_1; n_1; k_1; A) = f_1(A),\ F(m_2; n_2; k_2; A) = f_2(A),$$

то f_1 и f_2 будут различными функциями A. В таком смысле Кэйнс как будто прав.

Хочется мне побеседовать с Вами на одну тему, которая меня давно занимает, хотя я и не имею еще возможности углубиться в нее настолько, насколько это нужно.

Еще когда я писал по поводу книги Кауфмана (Статистика и математика [1915 – 1916] – в каблуковском[9] *Статистическом Вестнике*), я высказал ту мысль, что т.к. в основе всякого метода лежит какая-либо теория, то одно из двух: или статистический метод основан на приложении статистической теории, или какой-либо уже другой теорет. науки. Тогда я высказался за первую альтернативу. Теперь, вдумываясь в Ваши соображения в *Die Iterationen* [1917], я не чувствую себя поколебленным и, чем больше думаю, тем более утверждаюсь на том же.

За точку отправления позвольте взять Ваши возражения против выражений *статистическая физика* и т.п. Вы указываете (S. 4), что физики применяют наименование *статистический* к таким рассмотрениям, в которых нет и речи о *действительном* подсчете элементов. Существенно ли это? Треугольник остается треугольником и тогда, когда мы его находим и примеряем в действительности эмпирической, и тогда, когда мы его изучаем в его *действительности* сверхэмпирической. Физик занимается физикой и ставя опыт, и решая абстрактную задачу, устанавливаемую гипотетическими «положим, что даны...» (массы, силы, электроны и т.д.). Логическая суть очевидна: природа предмета (Wesen) не зависит [ни] от модальностей существования, несуществования, ни [от] того, полагаем ли мы его в суждении или допущении.

Таким образом, когда физик говорит: предположим, что даны в некотором объеме *n* молекул с такими-то скоростями и т.п., то это значит иными словами: предположим, что в данном поле наблюдения подсчет дал бы *n* единиц наблюдения с таким- то распределением по величине такого-то признака. Если действительный подсчет есть статистическая операция, то и предположенный подсчет есть статистическая операция, только именно предположенная, все равно как воображаемое убийство или кража суть убийство и кража, только именно воображаемые.

Наименование операции можно перенести на предмет изучения. Как в геометрии мы изучаем протяжения со стороны формы, отвлекаясь от материала, так и в статистике мы изучаем совокупности или множества со стороны численного состава, отвлекаясь от всего, что делает предметы подсчета принадлежащими к тому или иному роду вещей. Таким образом, предмет статистики (теоретической) – численный состав (in abstracto). Это конститутивный предмет, все прочие предметы изучения представляют его логические производные (Husserl)[10]. Совокупность изучается статистикой т.к. численный состав есть всегда числ. состав какой-либо совокупности. Но <u>совокупность изучается лишь со стороны ее численного состава и логических производных последнего</u>. Численные структуры как формы соотношения численных составов частей и целого; средние различного рода, разные относительные числа, все это – логические производные <u>основного понятия</u> статистики, которым является не совокупность, а именно <u>численный состав</u>.

Подразделения теоретической статистики даются дальнейшими признаками, которые могут быть сопряжены с конститутивным и его логическими производными, оставляя неопределенной species [вид] составляющих совокупность элементов. Это будут по порядку: *порядок*, *время* и *случай*.Таким образом, мы получаем такое подразделение

Статистика[11]

1. Силлептика 2. Стохастика

1.1. Силлептика в тесном смысле 1.2. Силлептическая кинематика (?)

1.11. Гористика 1.1.2. Синтагматика

Мне неясно, не лучше ли было бы ограничить смысл термина силлептика силлептикой в узком смысле и я не знаю какое название придумать для силлептической кинематики (этот термин я взял как первое подвернувшееся под руку ad hoc [не обдуманное заранее]).

Против Bevölkerungssylleptik [силлептика населения] я решительно возражал бы т.к., этот термин не обладает нужной логической чистотой, разве что если Bevölkerung взять за terminus technicus [технический термин], как у английских статистиков population [население]. Но и это, кажется, нехорошо, т.к. population у них вовсе не должно иметь отношения ко времени. Подразделений стохастики я не касаюсь. От исчисления вероятностей она резко отмежевана логически, а если принять Ваше название – разделительное (или дизъюнктивное) исчисление, то и терминологически. Понятия статистич. метода, статистич. техники, прикладной статистики (населения, неподвижных звезд и т.д.) вытекают тогда с полной непринужденностью из понятия статистики как теоретич. науки, которая как таковая фундирует [обосновывает] особый метод, а вместе с рядом прикладных дисциплин – особую технику и т. д.

Что мне всего менее ясно, так это то, на чем основано разграничение между силлептикой и Mengenlehre [теория множеств]. Вы упоминаете об этом пункте как о совершенно несомненном, но я о себе, к сожалению, не могу этого сказать. Я буду Вам премного обязан, если Вы хоть намеками уясните мне немного эту сторону дела.

Еще одно соображение. Если отвергнуть мою точку зрения, тогда я буду настаивать, чтобы обыкновенную статистику (без приложения стохастич. точек зрения) назвать прикладной силлептикой. Это, кажется, будет единственным логичным отношением к терминологии. Но раз термин *статистика* оказывается выкинутым за борт, то, чтобы не ломать привычки, можно употребить его чтобы дать общее название силлептике и стохастике. И вот мы опять пришли к тому же.

Примите уверения в глубоком уважении и преданности

Ваш Е. Слуцкий

P.S. Вашим советом послать свою статью о вероятностях циклических комбинаций попарно одинаковых элементов проф. Мизесу я с благодарностью воспользуюсь. Рукопись уже совсем готова, но нужно еще немного подождать.

Письмо №5, Слуцкий – Борткевич. Киев, 24.7.1925

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Позвольте от всей души поблагодарить Вас за присланные оттиски Zweck und Struktur einer Preisindexzahl I, II, III [1923 – 1924]. Я собираюсь летом штудировать их с большим интересом. Хотя это и не извиняет моего запоздалого отклика на Вашу любезность, но все же должен сказать, что всю эту весну и лето до последнего дня я лихорадочно проработал над довольно большой статьей по теории вероятности[12] (около 6 листов) Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte [1925]. Я получил несколько новых результатов не говоря о том, что обработка цикла вопросов под углом зрения понятия предела в стохастическом смысле мне кажется не лишенной интереса. В отношении ст[атистического] предела, как я узнал позже, приоритет принадлежит Cantelli, но понятие ст. асимптоты кажется никем не было сформулировано.

Пусть вероятность соблюдения условия A будет $P\{A\}$. Пусть распределение вероятностей случ. переменной x есть функция некоторой независимой переменной φ. Если при любом сколь угодно малом ε

$$\lim_{\varphi_1, \varphi_2, \ldots} P\{|x - f(\varphi)| \leq \varepsilon\} = 1,$$

то $f(\varphi)$ будет стох. асимптотой x или

$$\mathrm{as}_B(x) = f(\varphi),\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

Если $f(\varphi) = C$(onst), то имеем частный случай $\lim_B(x) = C$.
(as_B = asymptota Bernoulliana, $\lim_B$ = limes Bernoullianus)[13].

Пусть имеем ряд независимых испытаний и пусть вероятность появления некоторого события будет соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ... в последовательных испытаниях. Пусть

$$p_{(n)} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} p_i,$$

а число появлений события в n испытаниях пусть будет m. Тогда

$$\lim_B[(m/n) - p_{(n)}] = 0$$

или

$$\mathrm{as}_B(m/n) = p_{(n)},\ n \to \infty.$$

Пересматривая Poisson'a [1837], я нахожу, что его теорема гл. 4, №№ 94 – 96 выражается как раз именно означенными равенствами. Т.к. в условиях теоремы не предположено, что существует

$$\lim(1/n)\sum_{i=1}^{n} p_i,\ n \to \infty$$

и никаких на ряд чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ... не наложено ограничений, то я принужден отказаться рассматривать эту теорему как случай средней вероятности постоянного состава[14]. Насколько я могу судить, я имел здесь несчастье разойтись с Вашим мнением, – так же, как и в истолковании общей позиции Пуассона в вопросе о законе больших чисел, – но об этом писать слишком длинно. Кроме немецкой статьи я пишу об этом, и притом с большей подробностью, в *Вестнике Статистики* (появится осенью [1925a])[15] и я буду иметь удовольствие довольно скоро прислать Вам оттиски.

Хочу сообщить Вам несколько теорем (которые появятся в печати не так еще скоро). Пусть

$$g_r(x; v) = \mathrm{E}|x - v|^r \ (r \geq 0).$$

Значение v, обращающее g_r в минимум, обозначим C_r (центр. величина, Zentralwert), а вообще v я называю Bezugswert [начальное, исходное значение].

I) Если какой-либо четный момент $g_r(x; v)$, $r \geq 0$, имеет при безграничном увеличении числа испытаний (или, общее, для неограниченной последовательности значений независимой переменной $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$) твердую верхнюю границу и если x имеет стохастическую асимптоту, то все моменты порядка ниже r, центрированные около любой стох. асимптоты, стремятся к нулю:

$$\lim g_{r-\alpha}(x; v) = 0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

(если v какая-либо стохастическая асимптота), а все центральные величины C_k ($k < r$) будут стохастическими асимптотами. Если $r \geq 1$, то то же справедливо и для C_r (при $0 < r < 1$ не знаю).

II) Отсюда следует, что если условие

$$\lim g_r(x; C_k) = 0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \ (r > 0; k \leq r)$$

не соблюдается, а x имеет стох. асимптоты, то моменты высшего [более высокого] порядка чем r, должны обращаться в бесконечность.

III) Поэтому, если при $s > r$ g_s сверху ограничено, а g_r не обращается в нуль, x не может иметь стохастических асимптот (соотв. не подлежит зак. больших чисел).

Пользуясь обозначениями А.А. Чупрова[16], имеем, как известно, для средн. арифм.

$$\mu_{2(n)} = (1/n)\mu_{[2;n]} + [(n-1)/n]\mu_{[1;\,1;\,n]}.$$

Если не соблюдается условие

$$\lim \mu_{[1;\,1;\,n]} = 0, n \to \infty, \qquad (1)$$

то и рассеяние $x_{(n)}$ не имеет пределом нуль. Отсюда, однако (исключая случай когда x принимает только конечные значения), еще, как известно, нельзя сделать вывод, что $x_{(n)}$ не подчиняется закону больших чисел, ибо условие

$$\mathrm{E}[x_{(n)} - \mathrm{E}x_{(n)}]^2 \to 0, n \to \infty$$

установлено только как достаточное. Моя теорема показывает, что если

$$\mu_{4(n)} = \mathrm{E}[x_{(n)} - \mathrm{E}x_{(n)}]^4$$

ограничено сверху, для чего, как легко показать, достаточно, чтобы

$$\mu_{[4;\,n]} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} \mu_4^{(i)}$$

имело твердую верхнюю границу, то случайная переменная

$$x_{(n)} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i'$$

не будет подчинена зак. больш. чисел (не будет иметь стох. асимптот).

Возникает, однако, вопрос, не является ли для этого уже достаточным условием, что

(a) $\mu_{[2;\,n]}$ ограничено сверху и (b) Не соблюдено условие (1).
Чтобы это доказать, нужно было бы доказать в соотв. с приведенной выше теоремой, что при условиях (a) и (b) невозможно, чтобы

$$\lim \mathrm{E}|x_{(n)} - \mathrm{E}x_{(n)}|^{2-\alpha} = 0,\ 0 < \alpha < 2,\ n \to \infty$$

хотя бы для одного какого-либо значения α, напр., для α = 1 или для α сколь угодно малого. Но мне это не удалось.

Примите уверение в совершенном укажении и преданности.

Е. Слуцкий

Письмо №6, Слуцкий – Борткевич. Киев. 31.12.1925

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Приношу Вам свои извинения, что так поздно посылаю Вам мою последнюю работу (о *законе больших чисел* [1925]), но это в значит. степени зависело от посторонних обстоятельств.

Ваше письмо я прочел с душевной радостью, так как дорожу каждым редким случаем общения с Вами. В печатавшуюся тогда работу я уже не мог бы внести никаких изменений, но Вы заметьте, что я в моей критике Ваших взглядов, которую я себе позволил, опираюсь главным образом не на *Krit. Betr.*[1894 – 1896], а на *Iterationen* [1917], где, как мне казалось, определенная точка зрения выразилась с полной отчетливостью. В столь трудных вопросах, однако, невероятно затруднительно найти вполне подходящую формулировку, и я охотно допускаю, что от меня ускользнули известные нюансы.

Примите уверение в совершенном уважении и преданности.

Евгений Слуцкий

Письмо №7. Слуцкий – Борткевич. Москва 16.5.1926

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Ваше письмо не застало меня в Киеве и было переслано мне в Москву, куда я теперь перебрался из-за некоторых неладов с украинским языком[17]. Хочу надеяться, что Вы великодушно извините мне столь запоздалый ответ. На новом месте, в кругу новых обязанностей трудно было собраться с мыслями, потом подошли срочные работы и т.д. Я состою консультантом Конъюнктурного института, работая вместе с Н. С. Четвериковым[18], у которого временно и живу пока мне не дали еще обещанной квартиры. Кроме того, пришлось взять консультантство и в Госплане. *Преподаванием не занимаюсь.* Положение и состояние очень непривычные и ощущаются как что-то переходное, но как станется на деле Аллах ведает.

О смерти А. А. Чупрова, поразившей нас несмотря на то, что последнее время надежд уже почти не было, трудно и больно писать. Н. С. Четвериков сообщил Вам уже, конечно, о том, как она была пережита в нашей статистической семье и что предположено сделать. Я хоть и не имел счастья быть близким А. А., не могу забыть утонченной деликатности его и всегдашней готовности оказать помощь в научной работе. С самой теплой благодарностью вспоминается мне его отношение к моей работе Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte [1925], которую я послал ему в 1923г. в первом совсем кратком эскизе, спрашивая его совета насчет опубликования, т.к. тогда я был совсем отрезан от иностр. литературы. По всей вероятности, без настойчивых советов А. А. эта работа не была бы доработана в том более полном виде, в каком она сейчас печатается. Но только теперь, просматривая письма А. А., я вижу вполне с какой бездной деликатности обходил он в своих критических замечаниях все намеки на возможные продолжения и расширения темы[19], всё, что само собой должно было напрашиваться, но чего он не хотел касаться, чтобы не подсказать мне того, к чему я сам должен был придти.

О предмете нашего разногласия я неоднократно думал за это время, особенно по поводу корректуры свой статьи в *Metron*'е [1925], которая появится в ближайшей книжке. Там в первой главе в более сжатом виде охвачен приблизительно тот круг вопросов, который обнимается статьей *О законе больших чисел* [1925a] […].

Сделать сколько-нибудь значительных изменений мне не удалось, т.к. я не имел возможности проделать новых штудий над текстом Пуассона, которые могли бы изменить мою точку зрения. По второму пункту наших с Вами несхождений, именно насчет моего понимания Вашей концепции *сред. вер. пост*[*оянного*] *состава* [см. Письмо № 5 и Прим. 14], я мог бы написать много больше, но чрезвычайно боюсь злоупотребить Вашим вниманием. Скажу только следующее. Вопрос имеет как будто две стороны. (a) В какой мере распространяется то, что было установлено Вами относительно случаев, где играет роль *ср. вер. пост. сост.* и на те случаи, котор. я называю ср. вер. произв. состава. (b) Во-вторых, можно ли найти в самом тексте Вашей трактовки вопроса указания, что *ср. вер. произв. состава* автором принималась во внимание.

А. А. Чупров написал мне в последнем своем письме осенью, что он со мной не согласен, что он думает, что вопрос решается выражением средней квадратической. Отчасти это замечание совершенно правильно. Но оно бьет мимо моей критики, т.к. погашается пунктом (a): действительно, *ср. вер. пост. состава* в тесном смысле и *ср. вер. произв. состава* [см. Прим. 14] имеют много общего в особенности по сравнению со *ср. вер. в собств. смысле*. Дело, однако, не в этом, а в том, что, по моему убеждению, вычитать из Вашего текста *Krit. Betr.* [1894 – 1896] или из Вашего текста в *Iterationen* [1917], что рассматриваемый мной случай Вами предусмотрен и принят во внимание, как будто никак нельзя. Есть ряд мест и не только в *Kr. Betr.*, но и в *Iter.*, которые объективно этому противоречат. Я позволю себе отметить хотя бы следующее место:

Galt es doch für Poisson, ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Schema zu konstruiren, das dem wirklichen Geschehen, nämlich dem regellosen Wandel der zufälligen Ursachen adäquat wäre. Das Schema der konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit ist aber das gerade Gegenteil davon: denn hier gehen die betreffenden Wahrscheinlichkeitswerte (p_k) in feststehenden Proportionen in den Durchschnitt ein ([SS.] 54 – 55).

[*Пуассон же имел в виду построить такую теоретико-вероятностную схему, которая соответствовала бы действительным событиям, а именно беспорядочным изменениям случайных причин. Схема средней вероятности постоянного состава, однако, полная противоположность этому, ибо участвующие значения вероятностей (p_k) входят здесь в среднюю в установленных соотношениях.*]

Feststehende Proportionen [установленные соотношения] ведь это же наложение какого-то ограничения на подбор значений в ряду $p_1, p_2, \ldots$ Логический смысл фразы совершенно исключает мысль, что численные значения последовательных величин в ряду $p_1, p_2, \ldots$ совершенно какие угодно. Ведь нельзя же говорить о feststehende Proportionen по отношению к ряду, где численные значения менялись бы без всякого правила, или, напр., по такому правилу

1/10, 1/10, ..., 1/10 (m раз); 1/2, 1/2, ..., 1/2 (m^2 раз);
1/10, 1/10, ... 1/10 (m^4 раз); 1/2, 1/2, ..., 1/2 (m^8 раз) и т. д.

И вот я позволяю себе думать, что вопрос об объективном разуме текста, о том, *что* в него объективно вложено, и что может быть из него вычитано любым объективным исследователем, не оставляет никаких сомнений. Приводимое здесь место из *Iter.* мне кажется решающим.

Если я ошибаюсь и если Вы находите, что я что-нибудь упускаю из виду, то простите мне категоричность выражений. Я всегда и на письме [!] и в печати охотно признаю свою ошибку.

Посылаю Вам с той же почтой две свои работы. Одна это та, которую когда-то Вы так любезно помогли мне пристроить в журнал v. [von] Mises'a – только теперь до нее очередь дошла [1926]; другая еще из 1915г. [1915][20]. Оттиски, посланные мне во время войны, не дошли до меня, и я только теперь достал себе пять экземпляров. Один из них посылаю Вам; в этой работе мне кажется, что мне удалось кое-что существенное прибавить после Фишера, Эджворта и Парето. Не знаю, когда мне удастся возвратиться к этим темам и удастся ли. Тем более досадно, что у меня вылеживаются рукописи почти готовые, ... но в этом-то *почти* и все дело.

Съездив на Пасхе в Киев, я привез свои оттиски и теперь имею возможность послать все что могу Е.С. Альтшулю[21], о котором Вы писали мне. Сделаю это с большим удовольствием, должен буду извиниться, что не могу послать всего.

Искренне преданный Вам Е. Слуцкий

Письмо №8, Слуцкий – Борткевич. Москва, 19.5.1926

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Я позволю себе прибавить несколько соображений к предыдущему письму т.к. мне очень хочется попытаться выяснить Вам свою мысль насколько я могу, притом оставив в стороне Пуассона и вообще всю историю вопроса.

Пусть имеется безграничная последовательность урн с вероятностями

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

Из каждой урны вынуто по одному шару и пусть частость (relat. Häufigkeit) появления белого шара в n испытаниях будет α_n. Имеем

$$E\alpha_n = (1/n)\,(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = p_{(n)}.$$

Какова постановка вопроса, при которой $p_{(n)}$ будет, так сказать, идеальной нормой для α_n?

Над одними и теми же первыми n урнами ряда пусть будет произведено s серий испытаний, причем в каждой серии над каждой урной сделано по одному испытанию. Полученные частости пусть будут

$$\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(s)}, \ldots$$

Тогда, если позволите употребить мою символику,

$$\lim\nolimits_B \Big[(1/s)\sum_{i=1}^{s} \alpha_n^{(i)}\Big] = p_{(n)},\ s \to \infty.$$

Вот эта схема, подходящая под идею ср. вер. постоянного состава. Здесь $p_{(n)}$ есть стох. предел не для $\alpha_n^{(i)}$, а для $\sum_{i=1}^{s} \alpha_n^{(i)}$ и не при независ. переменном n, а при независ. переменном s.

А вот другая постановка эксперимента. Производится неограниченный ряд испытаний по порядку над теми же урнами. Рассматривается последовательность частостей

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_N, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots$$

Рассматривая значок N как переменную величину, будем иметь

$$\lim\nolimits_B [\alpha_N - p_{(N)}] = 0,\ N \to \infty$$

или

$$\mathrm{as}_B(\alpha_N) = p_{(N)},\ N \to \infty.$$

Такая постановка эксперимента и составит тот случай, который мне кажется необходимым рассматривать особо от предыдущего как случай средней вероятности произвольного (или произвольно переменного) состава.

С тем же случаем мы встречаемся, если над нашим рядом урн произведено две безграничных серии испытаний с частостями α'_N и α''_N. Тогда

$$\lim_B (\alpha'_N - \alpha''_N) = 0, N \to \infty$$

как бы не менялся состав урн на протяжении ряда.

Примите уверение в совершенном моем уважении и искренней преданности. Е. Слуцкий

Письмо №9, Борткевич – Слуцкий. Берлин, 4.6.1926

Многоуважаемый Евгений Евгеньевич!

Ваши оба письма от 16-го и от 19-го мая я получил. По вопросу о различении между ср[едней] вер[оятностью] в собств. см[ысле] и ср. вер. пост[оянного] состава я остаюсь при прежнем мнении и никаких противоречий у себя не нахожу. Ведь это различение приводится у меня в связи с вопросом о дисперсии статистического ряда и представляет интерес постольку, поскольку в первом случае мера дисперсии, т.е. сумма квадр. уклонений числа появлений [события] от его м[атематического] о[жидания] [здесь зачеркнуто: квадрат ср. кв. ошибки] = npq, а во втором

$$n \sum_{\lambda=1}^{m} g_\lambda p_\lambda q_\lambda \ (< npq), \qquad (1)$$

где m – число *различных* значений p_λ, а g_λ пропор. [?] в одном и др. ряду. Вместо (1) можно, конечно, написать

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i, \qquad (2)$$

где n – число испытаний. Я брал первое из этих двух выражений, чтобы подчеркнуть, что порядок, в котором вероятности p_i следуют одна за другой, безразличен. Если отдельные серии испытаний не связаны между собой никакими условиями, то ни о какой мере дисперсии речи быть не может[22].

Для того, чтобы выражение (1) или (2) было мерой дисперсии, необходимо, чтобы одна серия почти воспроизводила другую в отношении состава. Если мы, наоборот [напротив], имеем N испытаний, которым соответствуют ничем между собой не связанные вероятности и если мы разобьем этот ряд на s серий по n испытаний ($sn = N$), то мерой дисперсии будет, конечно, не $\sqrt{p_0(1-p_0)}$ [которая] не меньше, а больше $p_0(1 - p_0)$. Но этого случая Пуассон не имеет в виду, т.к. случай неоднородной дисперсии [?] (более общего, чем случай надморм дисперсии, который [?] Лексис в статье Über die Th. d. Stab. stat. Reihen [1879] Пуассон не имел касания). К сожалению я должен ограничиться этими прежними замечаниями за полнейшим недостатком времени для более подробного выяснения своей точки зрения[23].

Не знаю также когда удосужусь прочесть Вашу статью [1915] в *Giornale degli Economisti,* хотя вопрос меня интересует. Я недавно возвращался к нему но рассматривал его в гораздо менее замысловатой чем у Вас постановке.

Я очень рад, что Вам удалось поместить одно из Ваших исследований в журнале [?] Мизеса. Он желал бы поместить заметку о покойном А. А. Чупрове в размере не больше одной страницы (2-х столбцов) [здесь зачеркнуто: я позволил себе указать на Вас, думая, что Вы с большим успехом сумеете] и был бы Вам за таковую весьма признателен. Надеюсь, что Вы не откажитесь и, согласно с желанием Мизеса, доставите ему рукопись в *ближайшем* будущем[24]. В *Giornale degli Ec.* напишет Bresciani[25]. С покойным А. А. меня связывала 30-тилетняя дружба и каждое свидание с ним было для меня праздником. Трудно примириться с мыслью, что его не стало. Поблаг[одарите] Четверикова[26].

[*К этому письму приложены черновые вычисления Борткевича по поводу письма Слуцкого. Они относятся к подсчетам дисперсии и в сопроводительном тексте Борткевич упомянул свою неопубликованную рукопись 1914г.*]

Письмо №10, Слуцкий – Борткевич. Москва, 14.6.1926

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Сочту своим долгом написать о А. А. Чупрове для Мизеса. Я пишу ему, что статья [1926] будет готова не позднее как через две недели.

Ваши замечания к предмету нашей дискуссии прочитал с величайшим интересом, но со своей стороны не хочу больше злоупотреблять Вашим вниманием. Может быть удастся когда-нибудь встретиться и поговорить о многом. Я очень хотел бы, чтобы это удалось.

Если все-таки дойдет как-нибудь очередь интересов и занятий Ваших до темы моей статьи в *Giornale* [1915] и Вы пробежите ее, Вы, конечно, не откажетесь черкнуть мне несколько слов. Конец статьи я теперь написал бы значительно иначе. Там еще напрашивается дополнение. Именно, для однозначности определения функции полезности (до аддитивной константы) нет надобности требовать, чтобы на каждой гиперповерхности безразличия была пара благ таких, чтобы

$$[\partial^2 U\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)/\partial x_i\,\partial x_j] = 0.$$

Достаточно, чтобы можно было провести линию, пересекающую ряд гиперповерхностей безразличия, на которой какая-нибудь предельная полезность $\partial U/\partial x_k$ оставалась бы постоянной. А это в принципе всегда возможно. К этому результату можно придти и путем элементарных соображений как я делаю в одной еще ненапечатанной рукописи, где разбираю весь вопрос об измеримости вообще и специально об измеримости так наз. *субъективной* ценности[27]. К сожалению, очередь работ никак не подводит еще к окончательной ее обработке.

Вашу статью я уже прочел с живейшим интересом по экземпляру Ник. Серг. Четверикова. Мой экземпляр еще не дошел до меня, но конечно дойдет и я сердечно благодарю Вас за присылку.

Преданный Вам Евгений Слуцкий

Письмо №11, Слуцкий – Борткевич. Франкфурт/Майн, 29.9.1928

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

После конгресса в Болонье[28], совершив маленькую поездку по Италии, я приехал в Германию, чтобы провести здесь недели 3. Во Франкфурте я узнал, что я могу, – если Вы не сочтете это нескромностью, – от всей души поздравить Вас с 60м днем рождения и принести Вам самые лучшие пожелания. Я был бы очень рад если бы Вы позволили мне навестить Вас когда я приеду в Берлин, что случится, как я думаю, в середине следующей недели: в среду или четверг (3 или 4 октября). Встретиться лично с Вами для меня было бы большой радостью.

Глубоко уважающий Вас и искренне преданный Вам

Евгений Слуцкий

Примечания

1. Михаил Васильевич Птуха (1884 – 1961), демограф и историк статистики; о Четверикове см. Прим. 18. Николай Николаевич Володарский, Nikolaus Wolodkewitsch, род. 1888, был братом жены Слуцкого, Юлии Николаевны. Он остался в Германии, где стал в 1932 г. доктором физики в Техническом университете Дармштадта и работал затем в области технологии пищевых товаров и их контролирования (в 1930-е годы какое-то время в Турции). Публиковал работы на немецком языке по крайней мере до 1959 г.

2. В 1923 г. Слуцкий опубликовал в этом журнале две статьи и в следующем году послал Борткевичу оттиски их обеих (Письмо № 4), но в данном случае несомненно имел в виду свою статью (доклад) 1922 г. [15], см. Письмо № 2.

3. Позже Слуцкий опубликовал решение этой задачи, которую он обсуждал и в Письме № 2. Бывший тогда модным *закон малых чисел* совпадает с распределением Пуассона.

4. В своей опубликованной статье (1926а [22], с. 150 прим.) Слуцкий называет того биолога, который подтолкнул его к решению описанной задачи. Им был М. В. Чернояров, впервые же, как предположил Слуцкий, эту задачу поставил С. Навашин, но его решение в *Известиях Российской академии наук* 1912 г. он, однако, подверг обоснованному сомнению. Формулы Слуцкого из его письма Борткевичу повторены в статье 1926 г., однако формула (3), см. там формулу (16) на с. 153, оказалась ошибочной. Таблица Слуцкого повторена в статье на той же странице с несущественными исправлениями.

Виленкин (1969 [28], с. 165 – 169) решил частный случай этой задачи для $m = 0$. После простых вычислений его ответ при $s = 6$ приводится к совпадению с таблицей Слуцкого.

5. Эти замечания уточняли смысл равновозможных благоприятных шансов. В одном из них Борткевич указал, что “равномерная” случайность может не иметь места при извлечении билетиков из урны с возвращением.

6. Мы можем только упомянуть работу Птуха (1928 [31]).

7. См. Слуцкий (1922/1960 [15], с. 20), который применил этот термин со ссылкой на Борткевича.

8. Знаменитая задача (бюффонова игла) 1777 г. о вероятности пересечения упавшей иглой одной из нескольких параллельных прямых, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Своей задачей

Бюффон окончательно ввел в теорию вероятностей геометрические вероятности.

9. Николай Алексеевич Каблуков (1849 – 1919), земский статистик и редактор *Статистического вестника.*

10. Эдмунд Гуссерль (1859 – 1938), немецкий философ и основатель философской школы феноменологии.

11. Именно Борткевич (1917 [2], с. 4 – 5) предложил неудачные термины силлептика, гористика и синтагматика, выведя их из греческого языка. Стало общеизвестно, что со ссылкой на Якоба Бернулли он также повторил введенный тем термин *стохастика*. Уже в 1685 г. Валлис употребил выражение *стохастический* (итеративный) процесс, а Prevost & Lhuillier, в 1799 г., использовали его же в теоретико-вероятностном контексте (Шейнин 2005 [41], с. 61, прим. 1).

12. Слуцкий почему-то употребил единственное число (*вероятности*).

13. Термин *Modo Bernoulliano* применил в 1922 г. Романовский (Шейнин 1990 [37], с. 50 – 51). Сам Слуцкий (1925a [20], с. 2 – 3, прим. 3) упомянул Романовского в связи с выражением *стохастический предел* (см. выше). Там же, на следующих страницах, он пояснил различие между этим пределом и соответствующим понятием в анализе и сослался на не вполне ясное (как он сам отметил) замечание Пуассона. Впрочем, на указанное различие четко указал Лаплас в 1786 г. и, менее определенно, в начале гл. 3-й своей *Аналитической теории* (Molina 1936 [48], p. 386).

Слуцкий (1925a [20], с. 14) пояснил также, что принял термин *стохастическая асимптота*, поскольку соответствующее понятие напоминает об асимптоте в анализе, описывающей поведение двух функций.

14. См. Борткевич (1894 – 1896 [1], 1894, с. 650/1968, с. 64). Там же, на следующей странице, он вводит *среднюю вероятность в собственном смысле*, которая здесь упоминается в Письме № 7.

15. Немецкая и русская статьи это, очевидно, Слуцкий (1925b [21]; 1925a [20]).

16. В дальнейшем Слуцкий объяснил смысл первых двух обозначений, однако последнее из них, как читатель убедится, не нуждается в пояснении. Наша попытка найти его у Чупрова (1918 – 1919 [34]; 1918 – 1919 и 1921 [35]) оказалась безуспешной.

17. Слуцкий не владел украинским языком, который был объявлен обязательным при чтении лекций на территории Украины [32, с. 268].

18. Николай Сергеевич Четвериков (1885 – 1973), ученик Чупрова, самый близкий к своему учителю. Опубликовал работы по сельскохозяйственной статистике и индексной теории. Четыре года (видимо, 1931 – 1935) был в заключении как *вредитель*, а в 1937 или 1938 г. был снова репрессирован; во всяком случае, ему было запрещено проживать в крупных городах (Аноним 1995 [27]).

19. Это утверждение несколько противоречит предыдущему описанию совета Чупрова. Слуцкий (1925b [21], с. 26, Прим. 2) выразил Чупрову благодарность и публично. Там же (с. 27, Прим. 2) он с похвалой заметил. что Чупров [вопреки мнению Маркова!] принял термин *случайная величина* как “основу всего здания теоретической статистики”.

20. Темой новаторской статьи Слуцкого [14] был сбалансированный бюджет потребителя. В ней он развил некоторые идеи своей неопубликованной дипломной работы 1910 г. и некоторых работ Эджворта и Парето. Основным достижением Слуцкого было математическое доказательство того, что при определенных предпосылках реакция потребителя на изменение цены товара может быть разделено на две независимые и аддитивные составляющие, – на *эффекты дохода* (связанного с уровнем потребления) и *замещения* (структуры потребления). В наши дни формулы этого разделения были названы уравнениями Слуцкого и стали неотъемлемой частью каждого экономического курса.

Появившись в Италии в годы первой мировой войны, его исследование долгое время оставалось незамеченным; даже сам Слуцкий, как он сообщил Борткевичу, получил его оттиски (притом лить пять) только в 1926 г. Один из этих редких экземпляров достался Борткевичу, другой Слуцкий почти в то же время послал Рагнару Фришу, норвежскому экономисту и первому (в 1969 г.) нобелевскому лауреату по экономике, с которым он переписывался в 1925 – 1937 гг. Этот экземпляр был недавно обнаружен в бумагах Фриша в Осло.

И Борткевич, и Фриш были пионерами математической экономики, и всё-таки прошло еще 10 лет, пока заслуга Слуцкого не была окончательно признана учеными Европы и США, которые за это время переоткрыли те же результаты, частично независимо от него, и серьезно занимались дальнейшим развитием современной теории потребительского поведения и спроса. Среди них назовем Сэра Джона Хикса и Генри Шульца.

Тем не менее, первый перевод статьи Слуцкого на английский язык появился лишь в 1952 г. [25a], а первый русский перевод еще на 10 лет позднее [25b]. Об истории открытия статьи Слуцкого и ее влияния на западную экономическую литературу см. [51; 52].

Дипломная работа Слуцкого, *Теория предельной полезности*, хранится в отделе рукописей Национальной Библиотеки им. В. И. Вернадского (Киев), фонд I, № 44850. Опубликован ее перевод на украинский язык (Киев, 2006). На с. 56 этого перевода выдержка из письма Слуцкого Ректору Киевского коммерческого института 1919 г. свидетельствует о том, что статью [14] он написал по-английски и что редакция итальянского журнала сама перевела его на итальянский.

21. Евгений Альтшуль (Eugen S. Altschul), родом из Латвии (1887 – 1959). В одной из своих рецензий Чупров (1922/1960 [36], с. 424) упомянул его мимоходом. В 1925 г. Альтшуль (Борткевич и Чупров 2005/12, Письмо № 199) жил в Берлине и занимался в основном “банкирством”. В 1926 г. (там же, Письмо № 211) Чупров дал Альтшулю положительную устную характеристику как статистику.

Альтшуль остался в Германии после обучения в нескольких немецких городах (Фрейбург, Лейпциг, Страсбург) и получил степень доктора наук в Фрейбурге. Работал в Берлине в 1923 – 1926 гг. (где он возможно познакомился с Борткевичем) по управлению недвижимостью, в банках (см. выше замечание Чупрова) и журналистом на экономические темы. В середине 1926 г. возглавил учрежденное во Франкфурте на Майне *Общество по исследованию конъюнктуры* и преподавал соответствующий курс в тамошнем университете. Вполне возможно, что Слуцкого попросили рассказать Обществу о работе Московского конъюнктурного института. После 1933 г. Альтшуль был уволен и уехал в Англию, где экономист и последователь Кейнса Уильям Беверидж помог ему устроиться научным работником в Лондонскую школу экономики. Переехав в США, он работал там до 1939 г. в Национальном бюро экономических исследований Экономист и статистик Уэсли Митчелл, чью книгу *Циклы бизнеса* (*Business Cycles*) Альтшуль перевел в 1931 г. на немецкий, видимо помог ему на первых порах. Затем Альтшуль преподавал в нескольких университетах, в том числе в г. Канзас, штат Миссури, где и умер, см Hagemann & Krohn (1999 [45], vol. 1, pp. 4 – 7).

22. Более точно, *npq* является дисперсией не "статистического ряда", а количества появлений в нем исследуемого случайного события, имеющего постоянную вероятность появления в единичном испытании p при $q = 1 - p$ и числе независимых испытаний, равном n. Термин *дисперсия* в современном смысле, как заметил Дейвид (2001 [43], с. 227), ввел (на английском языке) Фишер (1918 [44], с. 399). Возможно, что в русском языке Борткевич употребил его одним из первых.

Предмет этой части письма Борткевич обсуждал не только в 1894 – 1896 гг., но и в дальнейшем (1917 [2], §2.2). Слуцкий (1925а [20], с. 20) объяснил, что обозначение Борткевича g_λ (см. ниже) означало число случаев, при которых вероятность p_λ относилась к появлению изучаемого события. Сумму членов $p_\lambda g_\lambda$ Борткевич назвал средней вероятностью постоянного состава.

23. Предыдущие несколько строк (после слов *мерой дисперсии*, которые таким образом остались неприкаянными) явно зачеркнуты.

24. Мизес действительно опубликовал некролог Слуцкий (1926 [23]).

25. Трудно сказать, почему Борткевич упомянул здесь Брешиани. В 1908 г. Брешиани (C. Bresciani, Bresciani-Turroni) (Борткевич и Чупров 2005 [12], Письмо № 88) возразил Джини, который отрицал закон малых чисел, а затем перевел по крайней мере одну рукопись Борткевича на ту же тему на итальянский язык (Письмо № 91), и она появилась в журнале Джини в 1909 г. Он собирался рецензировать *Очерки по теории статистики* Чупрова (Письмо № 123 1913 г.), и помог Чупрову получить визу для поездки в Италию (Письмо № 210 1925 г.).

26. Мы можем лишь заметить, что в 1924 – 1927 гг. Четвериков переписывался с Борткевичем, а в сентябре 1926 г. сообщил ему (Борткевич и Чупров 2005 [12], Прим. 178.2), что в *Вестнике статистики* "руководящее положение заняла [Мария] Смит. Выводы отсюда ясны". Иначе: наступила пора мракобесия, – для страны в целом. Черное Солнце (выражение Шолохова, придуманное им по другому поводу) взошло над Россией!

27. См. Слуцкий (1927 [24]).

28. В Болонье Слуцкий участвовал в работе Конгресса математиков (Четвериков 1959 [40], с. 269 – 270). Сенета (1992 [50], с. 30) перевел на английский язык письмо Слуцкого, которое тот написал своей жене во время работы этого Конгресса. В нем он (как и Четвериков) описал свое столкновение с Кантелли по поводу авторства усиленного закона больших чисел. Текст этого письма Четвериков передал одному из нас (О. Ш.), от кого они и попали к Сенете, см. Шейнин (1993 [38]).

Notes

1. Mikhail Vasilievich Ptukha (1884 – 1961), demographer and historian of statistics. On Chetverikov see Note 18.

Nikolai Nikolaevich Volodkevich, or Nikolaus Wolodkewitsch, born 1888, was a brother of Slutsky's wife, Iulia Nikolaevna. He remained in Germany, and in 1932 earned a doctorate in physics at the Technical University of Darmstadt and later worked in the field of food technology and testing (in Turkey for a period in the 1930s, then again in Germany). German publications in his name appeared at least until 1959.

2. In 1923, Slutsky published two papers in that periodical and in 1924 he sent Bortkiewicz reprints of both of them (Letter 4). Here, however, he was obviously bearing in mind his article (report) of 1922 [15], see Letter No. 2.

3. Later Slutsky (1926a [22]) published the solution of this problem which he also discussed in Letter 2. For his expression *law of small numbers* (a few lines below), introduced by Bortkiewicz and then in vogue, read *Poisson distribution*.

4. In his published paper (1926a [22]), Slutsky named the biologist who prompted him to solve the described problem. His name (in German) was M. W. Tschernojarow, but the first who had considered the same problem was, as Slutsky believed, S. Navaschin who had offered its solution in 1912, in a paper published by the Imperial Academy of Sciences (Petersburg). Slutsky, however, expressed reasonable doubts about the result of his predecessor. Slutsky's formulas from his letter to Bortkiewicz are repeated in his paper of 1926, but formula (3), which is there numbered (16), see p. 153, is corrected as is, rather insignificantly (see same page of the paper) his table.

Vilenkin (1969 [28], p. 165 – 169; 1971, pp. 127 – 130; 1972, pp. 94 – 96) solved a particular case of this problem for $m = 0$. After simple calculations, his answer for $s = 6$, given in another form, provide the same figure as Slutsky's table did.

5. These remarks specified the notion of equally possible favourable cases. In one of them Bortkiewicz noted that "uniform randomness" can be absent in an urn problem with the tickets being extracted and returned back.

6. We can only mention Ptucha (1928 [31]).

7. See Slutsky (1922/1960 [15], p. 20) where he used this term (disjunctive calculus) and referred to Bortkiewicz.

8. The celebrated Buffon problem of 1777. A needle falls upon a set of parallel lines equally distant one from another; required was the probability of its intersection with one of the lines. This problem decisively introduced geometric probability into the theory of probability.

9. Nikolai Alekseevich Kablukov (1849 – 1919), zemstvo statistician and economist, Professor at Moscow University, Editor of *Statistichesky Vestnik.*

10. Edmund Husserl (1859 – 1938), a German philosopher, founder of the philosophical school of phenomenology.

11. It was Bortkiewicz (1917 [2], pp. 4 – 5) who (unsuccessfully) proposed the terms *Sylleptik, Horistik* and *Syntagmatik*, deriving them from the Greek. It is now generally known that, after referring to Jakob Bernoulli, he also reintroduced *Stochastik*. Already Wallis, in 1685, had applied the expression *stochastic* (iterative) *process* and Prevost & Lhuilier, in 1799, had used it in a probability-theoretic context (Sheynin 2005a [41], p. 57, Note 1).

12. The Russian term is theory of *probabilities*; here, however, Slutsky used the singular number.

13. *Modo Bernoulliano* was an expression coined by Romanovsky in 1922 (Sheynin 1990 [37], pp. 50 – 51). Slutsky himself (1925a [20], pp. 2 – 3, Note 3) mentioned Romanovsky in connection with the notion of *stochastic limit* (see above). There also, on his next pages, he explained the difference between it and the concept of limit in analysis and quoted a relevant although not altogether distinct (as he himself remarked) statement by Poisson. However, it was Laplace who expressly noted that difference in 1786 and, less definitely, in the beginning of Chapter 3 of his *Théorie analytique* (Molina 1930 [48], p. 386).

Slutsky (1925a [20], p. 14) also explained that he adopted the term *stochastic asymptote* since the pertinent notion resembled the concept of asymptote in analysis as describing the behaviour of two functions.

14. See Bortkiewicz (1894 – 1896 [1], 1894, p. 650). There also, on the next page, he introduced *mean probability in the strict sense*, see Letter 7.

15. The German paper and the Russian contribution were apparently Slutsky (1925b [21]) and Slutsky (1925a [20]) respectively.

16. In the sequel, Slutsky explained the meaning of the first two symbols whereas the last one, as the reader will see, can actually be left without explanation. For this reason, after unsuccessfully scanning Chuprov (1918 – 1919 [34]) and Chuprov (1918 – 1919 and 1921 [35]), we prematurely abandoned here our attempt at finding it .

17. Slutsky did not master the Ukrainian language, which by a compulsory decree of the time was stipulated for all the lectures offered in academic institutions of that republic (Chetverikov 1959/1975 [32], c. 268; 2005 [32], p. 154).

18. Nikolai Sergeevich Chetverikov (1885 – 1973), Chuprov's student especially close to him. Worked in agricultural statistics, and on index numbers. Spent four years (apparently in 1931 – 1935) in prison as a *saboteur* and in 1937 or 1938 was subjected to new repressive measures (in any case, was banned from living in big cities) (Anonymous 1995 [27]).

19. This statement somewhat contradicts the previous description of Chuprov's advice. Slutsky (1925b/1960 [21], p. 26, Note 2) had also publicly expressed his gratitude to Chuprov. There also (p. 27, Note 2) he favourably noted that Chuprov (contrary to Markov's opinion!) applied the term *random quantity* (as it is called in Russian) "as the basis of the whole construction of theoretical statistics".

20. Slutsky (1915/14) is of course the paper on rational consumer behaviour on which Slutsky's fame in economic theory is based. It was published in Italian in one of the few European economic journals open at the time for contributions with mathematical content.

In this work Slutsky developed further some ideas from his 1910 master thesis, as well as earlier contributions by Francis Y. Edgeworth (1845-1926) and Vilfredo Pareto (1848-1923). Slutsky's main achievement was to prove mathematically that under certain assumptions the consumer's reaction to a price change (*price-effect*) can be separated into two independent and additive effects: (a) an *income-effect*, related to the level of consumption and (b) a *substitution effect*, pertaining to changes in the structure of consumption. The so-called *Slutsky Decomposition* has become an integral part of every economics syllabus today.

Owing to its appearance in Italy in the middle of WW-I, the essay remained unnoticed at the time – even the author, as this letters shows, received offprints only in 1926, and then only five. While one of these rare items went to Bortkiewicz, Slutsky sent another one almost simultaneously to Ragnar Frisch (1895-1973), the Norwegian economist (in 1969 the first laureate of the Nobel Prize in Economics) with whom he corresponded between 1925 and 1937 (this copy was recently found among Frisch's papers in Oslo). Although both recipients were pioneers of mathematical economics, it took another ten years before Slutsky's merits were finally recognized by various European and US-American scholars, who had derived the same results partially independently and who all were significantly involved in the further development of modern consumer theory - among them Sir John Richard Hicks (1904 –1989) and Henry Schultz (1893-1938). Even then, the first translation of Slutskii's paper into English did not appear until the early 1950s (see Slutsky 1952/25a), and the first Russian translation had to wait another decade (see Slutsky 1963/25b). The story of the discovery and impact of Slutsky's paper in Western economic literature during the 1930s is related in Chipmen and Lenfant (1999/51) and (2002/52).

Slutsky's master thesis, *Theory of Marginal Utility* (in Russian) is kept at the manuscript section, V. I. Vernadsky National Library (Kiev), Fond I, No. 44850. Its Ukrainian translation appeared in Kiev in 2006. There, on p. 56, Slutsky's letter of 27 March 1919 to the Rector of the Kiev Commercial Institute is reprinted stating that he submitted his article in English.

21. Eugen S. Altschul (1887 – 1959), a scholar of Latvian origin. Chuprov (1922/1960 [36], p. 424) mentioned him in passing in one of his reviews. In 1925 Altschul was living in Berlin and his main occupation was somehow connected with banking (Bortkiewicz & Chuprov 2005/[12], Letter 199). In 1926, in a conversation, Chuprov (Letter 211) favourably referred to Altschul the statistician.

Altschul had remained in Germany after his studies in Freiburg, Leipzig and Strassburg and a 1912 doctorate. After a long period of work in property administration, banks (see Chuprov's remark above) and economic journalism, in Berlin in 1923 – 1926 (where Bortkiewicz might have known him), Altschul was in mid-1926 called to head the newly-founded Frankfurt *Gesellschaft für Konjunkturforschung*, where from 1927 he also taught conjunctural research methods at the university. Slutsky may thus have been asked to provide information about the Moscow Conjunctural Institute. Altschul was dismissed from his Frankfurt appointments after the Nazi seizure of power in 1933, emigrated to England in the same year (William Beveridge helped him to a research appointment at LSE) and then to the US, where he worked until 1939 at the National Bureau of Economic Research (supported by Wesley Mitchell, whose *Business Cycles* he had translated and published in German in 1931) and later taught at various universities, including U. of Minnesota and the University of Kansas-City, Missouri. He died in 1959 in Kansas-City. See Hagemann & Krohn (1999 [45], Bd. 1, pp. 4 – 7).

22. More precisely, npq is the variance not of a "statistical series", but of the number of occurrences of the studied random event having constant probability p of its occurrence in a single trial, $q = 1 - p$, and n is the number of independent trials in the series. David (2001 [43], p. 227) noted that Fisher (1918 [44], p. 399) had introduced the term *variance* in its modern sense and Bortkiewicz was possibly one of the first to use its translation (*dispersia*) in Russian.

Bortkiewicz discussed the subject-matter of this part of his letter not only in 1894 – 1896, but also in his contribution (1917 [2], §2.2). Concerning Bortkiewicz' notation g_λ (below), Slutsky (1925a [20], p. 20) explained that it was the number of times that the probability p_λ was attached to the occurrence of the studied random event. Bortkiewicz called the sum of the terms $p_\lambda g_\lambda$ the mean probability of a constant composition.

23. The few last lines (after the words *measure of variance*, which were thus left senseless) were obviously deleted.

24. Slutsky (1926b [23]) is his obituary of Chuprov that Mises had indeed published.

25. We are unable to say in what connection C. Bresciani (Bresciani-Turroni) is mentioned here. In 1908, he objected to Gini (Bortkiewicz & Chuprov 2005 [12], Letter 88) who denied the law of small numbers. He then translated into Italian at least one of Bortkiewicz' manuscripts on the same subject (Letter 91) which appeared in Gini's *Giornale* in 1909. Later, he thought of reviewing Chuprov's *Очерки* (*Essays on the Theory of Statistics*, 1909 and 1910; posthumous edition, 1959), see Letter 123 of 1913, and, finally, in 1925 he helped Chuprov to obtain a visa for travelling to Italy (Letter 210).

26. We can only say that in 1924 – 1927 Chetverikov corresponded with Bortkiewicz and, in September 1926 (Bortkiewicz & Chuprov 2005 [12], Note 178.2) informed him that Maria Smit (a notorious hard-liner) became the leading figure at the *Vestnik Statistiki* periodical, and he added: "The conclusions are obvious". In other words: the era of obscurantism had *in general* set in. A Black Sun had risen, as Mikhail Sholokhov wrote somewhere on quite another occasion.

27. See Slutsky (1927 [24]).

28. In Bologna, Slutsky participated in the work of the Congress of Mathematicians, see Chetverikov (1959 [40], pp. 269 – 270/2005, pp. 155 – 156 and Note 9 on pp. 163 – 164). Seneta (1992 [50], p. 30) published an English translation of a letter written by Slutsky to his wife during the sittings of the Congress. There, as also Chetverikov reported, he described his encounter with Cantelli concerning the authorship of the strict law of large numbers. One of us (O. S.) had received the text of this letter from Chetverikov and sent it to Seneta (Sheynin 1993 [38]).

References

В. И. Борткевич (L. von Bortkiewicz)

For a rather comprehensive list of his works see

Борткевич и Чупров (2005 [12])

1.(1894 – 1896), Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik. *Jahrbücher f. Nat.-Ökon. u. Statistik*, Bd. 8 (63), pp. 641 – 680; Bd. 10 (65), pp. 321 – 360; Bd. 11 (66), pp. 671 – 705. Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики. В книге Четвериков (1968 [33], с. 55 – 137).

2. (1917), *Die Iterationen.* Berlin.

3. (1918a), Der mittlere Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten. *Jahresber. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 27, pp. 71 – 126 of first paging.

4. (1918b), Homogenität und Stabilität in der Statistik. *Skand. Aktuarietidskr*., Bd. 1, pp. 1 – 81.
5. (1920), Das Laplacesche Ergänzungsglied und Eggenbergers Grenzberichtigung zum Wahrscheinlichkeitsintegral. *Arch. Math. Phys*., Bd. 20, pp. 37 – 42.
6. (1921), Variationsbreite und mittlerer Fehler. *Sitzungsber. Berliner math. Ges*., Bd. 21, pp. 3 – 11.
7. (1922a), Die Variationsbreite beim Gaußschen Fehlergesetz. *Nord. Statistisk Tidskr*., Bd. 1, pp. 193 – 220.
8. (1922b), Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler. *Z. f. angew. Math. u. Mech*., Bd. 2, pp. 358 – 375.
9. (1923), Wahrscheinlichkeit und statistische Forschung nach Keynes. *Nord. Statistisk Tidskr*., Bd. 2, pp. 1 – 23.
10. (1923 – 1924), Zweck und Struktur einer Preisindexzahl. Ibidem, pp. 369 – 408, Bd. 3, pp. 208 – 251 and 494 – 516.
11.(1926), Chuprov. An obituary. Ibidem, Bd. 5, pp. 163 – 166. In Swedish. Translated in Chuprov, A. *Statistical Papers and Memorial Publications*. Berlin, 2004; also www.sheynin.de
12. **Борткевич и Чупров** (2005), *Perepiska* [Correspondence], 1895 – 1926. Berlin; also www.sheynin.de

Е. Е. Слуцкий, E.E. Slutsky

For an almost complete list of his publications see his biography [32] or his *Collected works* [26].
Items, 13 and 16 – 20 (and a few others, which are immediately detected) are in Russian

13. (1915 – 1916), Statistics and mathematics. *Statistich. Vestnik*, No. 3/4, pp. 1 – 17, this being a review of Kaufman (1916 [29]).
14. (1915); Sulla teoria del bilancio del consumatore. *Giornale degli Econ*., vol. 51, pp. 1 – 26. Translated in 1952, see below [25].
15. (1922), On the logical foundation of the calculus of probability.*Vestnik Statistiki*. Перепечатка (Reprint): Слуцкий (1960 [26], с. 18 – 24). Translated in *Probability and Statistics. Russian Papers of the Soviet Period.* Berlin, 2005. Also www.sheynin.de
16. (1923a), On certain models of correlative connection and on a systematic error in the empirical value of the correlation coefficient. *Vestnik Statistiki*, No. 1 – 3, pp. 31 – 50.
17. (1923b), On a new coefficient of the mean density of population. Ibidem, No. 4 – 6, pp. 5 – 19. Also published in Ukrainian in *Zapiski Ukrainsk. Akad. Nauk*, Sozialno-Ekonomich. Vidd., No. 1, 1923b, pp. 138 – 150.
18. (1923c), On calculating the state revenue from the issue of paper money. *Mestnoe Khoziastvo*, No. 2, pp. 39 – 62.
19. (1923d), Mathematical notes to the theory of the issue of paper money. *Ekonomich. Bull. Koniunkturn Inst*., No. 11 – 12, pp. 53 – 60.
20. (1925a), On the law of large numbers. *Vestnik Statistiki*, No. 7/9, pp. 1 – 55.
21. (1925b), Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte. *Metron*, Bd. 5, No. 3, pp. 3 – 89. Перевод (Russian transl.): Слуцкий (1960 [26], с. 25 – 90).

22. (1926a), Über die zufällige zyklische Anordnung paarweise gleicher Elemente. *Z. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 6, pp. 150 – 159. An English translation: The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica* vol. 5, 1937, pp. 105-146.

23. (1926b), Al. A. Tschuprow [Obituary]. Ibidem, pp. 337 – 338.

24. (1927, in German), A critique of Böhm-Bawerk's concept of value and his theory of the measurability of value. *Structural Change and Econ. Dynamics*, vol. 15, 2004, pp. 357 – 369. Cf. Chipman (2004 [34]).

25a. (1952), On the theory of the budget of the consumer. In *Readings in Price Theory.* Editors, G.J. Stigler, K.T. Boulding. Homewood, Ill., pp. 27 – 56.

25b. (1963), К теории сбалансированного бюджета потребителя. В книге *Экономико-математические методы,* вып. 1. *Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления*. М., с. 241 – 271. Редактор А. Л. Вайнштейн. Перевод Н. С. Четверикова. Комментарии (А. А. Конюс, В. А. Волконский): с. 271 – 277. В 1920-е годы и Конюс, и Вайнштейн работали вместе со Слуцким в Конъюнктурном институте. In the 1920s, both Veinstein and Konius worked at the Conjuncture Inst. together with Slutsky.

26. (1960), *Избранные труды* (Sel. Works). М. Комментарии Б. В. Гнеденко.

Другие авторы. Other Authors

27. **Anonymous** (1995), Jubilee dates and anniversaries. *Voprosy Statistiki*, No. 11, p. 77.

28. **Vilenkin, N. Ya., Виленкин Н. Я.** (1969), *Комбинаторика.* М. *Combinatorics*. New York, 1971; *Combinatorial Mathematics*. Moscow, 1972.

29. **Kaufman, A.A.** (1912), *Теория и методы статистики* (Theory and Methods of Statistics). Moscow. German translation: 1913. Several later Russian editions up to the posthumous and revised by other authors edition of 1928.

30. **Lexis, W., Лексис В.** (1879), Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen. *Jahrbücher f. Nat.-Ökon. u. Statistik*, Bd. 32, pp. 60 – 98. Reprinted in the author's *Abhandlungen.* Jena, 1903, pp. 170 – 212. Russian transl.: О теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968 [33], с. 5 – 38).

31. **Ptucha, M.V., Птуха М. В.** (1928), *Смертность в России и на Украине* (Mortality in Russia and the Ukraine). Харьков – Киев.

32. **Chetverikov, N.S., Четвериков Н. С.** (1959), The life and work of Slutsky, in Russian. Reprinted in author's *Статистические исследования* (Statistical Investigations [Coll. papers]). Moscow, 1975, pp. 261 – 281. Translated in *Probability and Statistics. Russian Papers of the Soviet Period*. Berlin, 2005, pp. 146 – 168; also www.sheynin.de

33. **---,** составитель (compiler) (1968), *О теории дисперсии.* (On the Theory of Dispersion). М.

34. **Чупров А. А., Tschuprow (Chuprov, A. A.)** (1918 – 1919), Zur Theorie der Stabilität statistischer Reihen. *Skand. Aktuarietidskr*., t. 1, pp. 199 – 256; t. 2, pp. 80 – 133. Russian transl.: К теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968 [33], с. 138 – 224).

35. --- (1918 – 1919, 1921), On the mathematical expectation of the moments of frequency distributions. *Biometrika*, vol. 12, pp. 140 – 169 and 185 – 210; vol. 13, pp. 283 – 295.

36. --- (1922), Lehrbücher der Statistik. *Nordisk Statistisk Tidskr.*, Bd. 1, No. 1, pp. 139 – 160 and No. 2, pp. 329 – 340. Russian transl.: Учебники статистики. В книге автора *Вопросы статистики.* М., 1960, с. 413 – 429.

37. **Sheynin, O., Шейнин О. Б.** (1990,in Russian)*, Chuprov*. Göttingen, 1996.

38. --- (1993), Chuprov, Slutsky and Chetverikov: some comments. *Hist. Math.*, vol. 20, pp. 247 – 254.

39. --- (1999), Е. Е. Слуцкий: к 50-летию со дня смерти. *Историко-математич. исследования*, вып. 3 (38), с. 128 – 137. In Russian.

40. --- (2001), Anderson's forgotten obituary of Bortkiewicz. *Jahrbücher f. Nat.-Ökon. u. Statistik*, Bd. 221, pp. 226 – 236.

41a. --- (2005a), *Theory of Probability. Historical Essay.* Berlin.

41b. --- (2005b), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. This is a translation of [41a].

42. **Chipman, J.S.** (2004), Slutsky's praxeology and his critique of Böhm-Bawerk. *Structural Change and Econ. Dynamics*, vol. 15, pp. 345 – 356.

43. **David H. A.** (2001), First (?) occurrence of common terms in statistics and probability. In David H. A., Edwards A. W. F. (2001), *Annotated Readings in the History of Statistics*. New York.

44. **Fisher R. A.** (1921), The correlation between relatives on the supposition of Mendelian inheritance. *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, vol. 52 (pt 1 for 1918 – 1919), 1921, pp. 399 – 434.

45. **Hagemann H., Krohn C.-D.**, Hrsg (1999), *Biographisches Handbuch der deutschsprachigen wirtschaftswissenschaftlichen Emigration nach 1933*, Bde 1 – 2. München.

46. **Keynes, J.M.** (1921), *Treatise on Probability. Coll. Writings*, vol. 8 (the whole volume). London, 1973.

47. **Lange, F.A.** (1894), *Logische Studien.* Isorlohn. Second edition.

48. **Molina, E.C.** (1930), The theory of probability: some comments on Laplace's Théorie analytique. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, pp. 369 – 392.

49. **Poisson, S.D.** (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements.* Paris.

50. **Seneta E.** (1992), On the history of the strong law of large numbers and Boole's inequality. *Hist. Math.*, vol. 19, pp. 24 – 39.

51. **Chipman J. S., Lenfant J.-S.** (1999), История одной находки: как была заново открыта и интерпретирована статья Слуцкого 1915 г. *Экономическая школа, журнал-учебник*, т. 5, с. 25 – 49. In Russian. Next item: its enlarged and translated version.

52. --- (2002), Slutsky's 1915 article: How it came to be found and interpreted. *History of Political Economy*, vol 34, No. 3, pp. 553 – 597.