Шестая хрестоматия
по истории теории вероятностей и статистики
Составитель и переводчик О. Б. Шейнин
Берлин 2008

ISBN 3-938417-72-2
Текст книги размещен также в Интернете www.sheynin.de

Содержание

Предисловие

Это – шестая хрестоматия, выходящая в свет с 2006 г. Взятые совместно, они позволяют достаточно полно ознакомиться с зарубежной литературой по нашей теме. Особняком в предлагаемой книге выглядят посмертная статья Максвелла и одна из статей Ньюкома, а именно о развитии науки в США. Максвелл, возможно, и не помышлял о публикации своего сочинения, но оно во всяком случае интересно в связи с его рассуждениями, пусть несколько косвенными, о случайности, и ясно, что эта тема заслуживает самого серьезного внимания. Ньюком был весьма разносторонним ученым, и его мысли не могут не оказаться поучительными. Мы поместили ее в Приложениях и там же – список наших публикаций, в котором перепечатано Содержание наших предшествующих *Хрестоматий*. Также помещен список наших публикаций, в котором читатель найдет содержание всех предыдущих хрестоматий. Каждая из остальных статей, как представляется, также интересна и малоизвестна.

I

А. Муавр

Измерение шансов

De mensura sortis (1712), or On the measurement of chance
Intern Stat. Rev., vol. 52, 1984, pp. 237 – 262

От переводчика

Муавр опубликовал свой трактат на латинском языке, мы же перевели его с английского перевода Б. МакКлинтока, который был предварен комментарием А. Хальда (с. 229 – 236). Хальд проанализировал трактат с современной точки зрения, указал номера соответствующих задач по всем трем изданиям *Учения о шансах* Муавра, см. ниже его таблицу, и описал отношения Муавра и Монмора.

В своем *Посвящении* Муавр несколько пренебрежительно упомянул этого французского автора, который опубликовал свою книгу (1708) анонимно. В ее втором издании Монмор резко высказался по поводу отношения к нему Муавра, тот же, в Предисловии к первому изданию своего *Учения*, весьма положительно отозвался и о Монморе, и о втором издании его книги. Монмор, однако, умер в 1719 г., а Муавр исключил этот отзыв из последующих изданий *Учения*. Хальд сообщил почти обо всем этом; см. также Монмор (1708/1713, с. xxvii и 362 – 369), Тодхантер (1865, с. 141 – 142) и Дейвид (1962, с. 153 и 158 – 159).

Мы пронумеровали некоторые формулы и ввели обозначение факториала, которое не могло еще появиться у Муавра.

Таблица (Хальд, комментарий к данному мемуару)

Соответствие между номерами задач в сочинениях Муавра

1712	1718	1738	1756	Characterization of problem
1	1	p. 25	p. 25	The binomial distribution
2 3 4	2 3 4	p. 18 1 2	p. 18 1 2	The division problem for two players
5 6 7	5 6 7	3 4 5	3 4 5	Cumulative binomial equal to $\frac{1}{2}$. Find n. Approximative solution by means of Poisson distribution
8	8	6	6	The division problem for any number of players
9	9	7	7	The ruin problem. Huygens' fifth problem
10	10	8	8	The division problem for two players
11 12	11 14	10 11	10 11	Huygens' second problem
13	—	—	—	Huygens' first problem
14	20	19	20	The hypergeometric distribution. Huygens' fourth problem
15	31	43	44	Waldegrave's problem
16 17	27 27	36 36	37 37	Robartes' problem. The division problem for two gamesters playing bowls
18 19	29 30	38 39	39 40	The occupancy problem
20 21 22 23 24 25 26	33 35 36 37 38 40 41	57 59 60 61 62 64 65	58 60 61 62 63 65 66	The duration of play. Algorithm for finding the probability that the duration is at least a given number of games, first for the players having the same numbers of counters and then for different numbers of counters. Also the case with one player having an infinite number of counters
p. 220	p. 17	p. 35	p. 39	Distribution of sum of discrete, uniformly distributed random variables

Перевод столбца Характеристика задач

1. Биномиальное распределение. **2 и 10.** Раздел ставки между двумя игроками. **5.** Биномиальное распределение; приложение распределения Пуассона. **8.** Раздел ставки при любом числе игроков. **9.** Разорение игрока. Дополнительная Задача № 5 из трактата Гюйгенса. **11 и 13.** Дополнительные задачи №№ 2 и 1. **14.** Гипергеометрическое распределение. Дополнительная задача № 4. **15.** Задача Вальдеграва. **16.** Задача Робертса. Раздел ставки при игре типа боулинг. **20.** Продолжительность игры. Вероятность того, что она продлится не менее заданного числа партий при одном и том же числе и при различных количествах жетонов у игроков. Бесконечное число жетонов у одного из них. **Без номера.** Распределение суммы дискретных равномерно распределенных случайных величин.

Библиография

David F. N. (1962), *Games, Gods and Gambling.* London.

De Moivre A. (1718), *Doctrine of Chances*. Последующие издания: 1738, 1756. Перепечатка последнего издания: Нью-Йорк, 1967.

Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard.* Paris, 1713. Перепечатка: New York, 1980.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Известнейшему джентльмену, Френсису Робертсу, благороднейшему покровителю математических наук

По Твоему увещеванию, известнейший сэр, я решил некоторые задачи об игре в кости и выявил принципы, по которым могут быть получены их решения, и вот теперь я публикую их [задачи] по распоряжению Королевского общества.

Гюйгенс был первым, насколько мне известно, кто представил правила для решения такого вида задач, которые французский автор совсем недавно хорошо пояснил различными примерами. Но, как кажется, эти выдающиеся господа не достигли той простоты и общности, которых требует суть темы; более того, поскольку они вводили множество неизвестных для описания различных условий, в которых находятся игроки, их вычисления стали слишком сложными. Предполагая, кроме того, что мастерство всех игроков всегда одинаково, они слишком сузили учение об играх.

Метод, который я особо применяю, это учение о соединениях, и при правильном его понимании он облегчает решение многих задач, которые в противном случае оказались бы очень трудными. Но я, впрочем, не ограничился этим методом и несколько раз применил бесконечные ряды, особенно если требовалось учитывать порядок вступления в игру. Эти ряды, однако, либо обрываются сами по себе, либо суммируются точно, либо стремятся к истине. Я решил те три задачи [16, 17, 18 – Б. МакКлинтон], которые Ты, знаменитейший сэр, предложил мне, и не без большого удовольствия. И если меня хоть как-то похвалят за эти вещи, то, как я полагаю, в основном за их решение.

Если Ты сможешь в то время, которое Ты так разумно используешь на благо государства, чтобы отвлечься, проследить за этими весьма успешно установленными вещами, то для усовершенствования этого учения ничего больше не потребуется. И вместе с тем станет ясно, насколько Ты выделяешься особой остротой рассудка, притом, что размышления подобного рода могут вовсе и не быть несовместимыми с менее понятными вещами и более важными исследованиями.

Остаюсь, известнейший сэр, смиреннейший и покорнейший Тебе

Абр. Муавр

Если p – число шансов, при которых может произойти некоторое событие, а q– число шансов, при котором оно может не наступить, то и те, и другие шансы имеют [собственные] степени вероятностей. Но если все шансы, в соответствии с которыми событие может произойти или нет, имели равные легкости, вероятность его появления будет относиться к вероятности непоявления как p к q.

Пусть игроки A и B станут утверждать о событиях, что если произойдут p шансов, выиграет A, но если q шансов, то выиграет B, и если на кон поставлена сумма a, то sors или ожидание A будет равно $pa/(p + q)$[1], а sors или ожидание B – $pb/(p + q)$. Более того, если A или B продаст свое ожидание, то по справедливости они должны будут получить, соответственно, $pa/(p + q)$ и $pb/(p + q)$. А если будет предложено, что победитель выиграет a, причем p шансов предоставляется игроку A, а q шансов – B, и игроки заранее договариваются о разделе выигрыша в соответствии с указанным различием, то A должен будет получить долю $pa/(p + q)$, а B – долю $pb/(p + q)$.

Если два события не зависят друг от друга, так что первое имеет p шансов появиться и q шансов – не произойти, а второе, соответственно, r и s шансов, то следует перемножить $(p + q)$ на $(r + s)$ и произведение […] представит все шансы, в соответствии с которыми во всех различных случаях могут появиться и не произойти эти события.

И поэтому, если А и В держат пари, и А заявляет, что произойдут оба события, их шансы будут относиться как pr к $(qr + ps + qs)$. Если же А заявит, что […]. Если же, однако, А заявит, что […]. Тем же самым методом рассуждения соотношения шансов будут найдены одним только умножением, если А и В держат пари о трех или более событиях.

Пусть все события имеют заданное число шансов и для появления, и, равным образом, для ненаступления, и именно a и b соответственно, и пусть количество всех событий n, тогда следует возвести $(a + b)$ в n–ю степень. Если А играет с В при условии, что при появлении одного или более событий выигрывает А, а если не произойдет ни одного события – то В, то соотношение их шансов будет равно $(a + b)^n - b^n$ к b^n, ибо единственный член [бинома] в котором нет a, это b^n.

Если […] А выигрывает при появлении двух или более событий, то […] и т. д. во всех остальных случаях.

Задача 1. А и В бросают кость. А выигрывает, если в восьми бросках одно очко появится не менее, чем дважды, если же это произойдет только один раз, или вовсе нет, то выигрывает В. Каково соотношение шансов?

Решение. Для появления одного очка есть только 1 шанс и 5 шансов против этого, пусть поэтому $a = 1$ и $b = 5$. А так как бросков 8, то $n = 8$ и соотношение шансов будет равно $(a + b)^n - b^n - nab^{n-1}$ к $b^n + nab^{n-1}$, т. е. 663 991 к 1 015 625, или примерно 2:3.

Задача 2. А и В по очереди катят шар и каждый раз выигрывает тот, чей шар окажется ближе к цели. После некоторого числа партий игроку А для победы не хватает четырех очков, а В – шести, притом мастерство[2] А таково, что в каждой партии соотношение шансов равно 3:2 в его пользу. Каково соотношение шансов в предложенном случае?

Решение. Игра закончится не более, чем через 9 партий, т. е. через число партий, равное сумме недостающих очков минус 1. Возвысим поэтому $(a + b)$ в девятую степень, получим […]. Все члены [полученного многочлена], содержащие a в четвертой или более высокой степени, должны быть приписаны игроку А, а все члены, в которых b содержится в шестой или более высокой – игроку В. Соотношение шансов поэтому равно […]. Если $a = 3$ и $b = 2$, то оно окажется равным 1 759 077:194 048.

И в общем случае, если недостает p и q партий, бином $(a + b)$ следует возвести в степень $(p + q - 1)$, и пусть игрокам А и В достанутся столько членов, сколько игр недостает их противникам, т. е. пусть А возьмет столько [первых] членов, сколько единиц в q, а В – столько [последних] членов, сколько единиц в p.

Задача 3. В той же игре мастерство А таково, что он может с равными шансами взяться выиграть три партии сряду. Каково соотношение шансов игроков в любой партии?

Решение. Пусть искомое соотношение равно z:1. Возведем (z + 1) в куб […] и по условию задачи искомое соотношение окажется равным z^3 к ($3z^2 + 3z + 1$). Поэтому

$$z^3 = 3z^2 + 3z + 1,\ 2z^3 = z^3 + 3z^2 + 3z + 1,\ z\sqrt[3]{2} = z + 1,\ z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}.$$

Соотношение шансов будет равно $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$:1.

И вообще, если А может с равными шансами взяться выиграть n партий подряд, то он сможет поставить $1/(\sqrt[n]{2} - 1)$ против одного за то, что выиграет первую партию.

Задача 4. Игрок А может с равными шансами выиграть у В три партии до того, как В выиграет две. Найти соотношение их мастерства.

Решение. Пусть соотношение мастерства будет z:1. Возвысим (z + 1) в четвертую степень […], и соотношение шансов победить в игре будет равно $(z^4 + 4z^3):(6z^2 + 4z + 1)$; эти шансы [теперь уже] равны друг другу и

$$z^4 + 4z^3 = 6z^2 + 4z + 1.$$

При решении этого уравнения окажется, что z очень близко к 1.6 [при z = 1.6 левая часть уравнения равна 22.94, а правая часть – 22.76], а потому соотношение мастерства почти равно 8:5. [При делении исходного многочлена 4-й степени на z – 1.6 все коэффициенты частного оказываются положительными, и ни один из трех других корней многочлена не может быть положительным.]

Задача 5. Событие имеет a шансов появиться в первом испытании и b шансов – не произойти. Сколько испытаний следует сделать, чтобы А и В с равными вероятностями могли держать пари на то, что событие произойдет или нет?

Решение. Пусть это событие может с равной вероятностью наступить или нет в x испытаниях. Тогда, по доказанному,

$$(a + b)^x - b^x = b^x,\ x = \frac{\ln 2}{\ln(a+b) - \ln b}.$$

Более того, исходя из того же уравнения, положим теперь, что $a:b$ = 1:q, тогда

$$[1 + (1/q)]^x = 2.$$

Возвысив полученный бином в степень x по теореме Ньютона, получим

$$1 + \frac{x}{q} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2q^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3q^3} + ... = 2.$$

При $q = 1$ будет $x = 1$, а если $q = \infty$, то и $x = \infty$. При бесконечном x это уравнение примет вид

$$1 + \frac{x}{q} + \frac{x^2}{2q^2} + \frac{x^3}{6q^3} + ... = 2.$$

Положим теперь $x/q = z$, тогда

$$1 + z + (1/2)\, z^2 + (1/6)\, z^3 + \ldots = 2.$$

Но раз левая часть этого уравнения есть число, натуральный логарифм которого равен ln2, то $z \approx 0.7$ [= 0.693]. [Левая часть равна e^z.]
Итак, если $q = 1$, то $x = q$, а если $q = \infty$, то $x \approx 0.7q$. Таким образом, мы нашли весьма тесные границы для соотношения $x{:}q$, ибо оно начинается с 1, а когда q доходит до бесконечности, то, наконец, заканчивается соотношением, примерно равным 7/10.

Пример 1. Требуется найти, в скольких попытках можно взяться выбросить двумя костями две единицы.

Решение. Есть только один шанс выбросить две единицы и 35 шансов против этого, так что $q = 35$. Умножим 35 на 0.7 и произведение 24.5 укажет, что искомое число находится между 24 и 25.

Пример 2. Требуется найти, в скольких попытках можно взяться выбросить тремя костями три единицы.

Решение. Есть только один шанс выбросить три единицы тремя костями и 215 шансов против этого. Пусть 215 будет умножено на 0.7, тогда произведение 150.5 укажет, что искомое число находится между 150 и 151.

Лемма. Найти число шансов выбросить заданное число очков при броске заданного числа костей [с заданным числом граней].

Решение. Пусть число очков равно $(p + 1)$, n – число костей с f гранями каждая. Обозначим $p - f = q,\ q - f = r,\ r - f = s,\ s - f = t$ и т. д. Число шансов окажется равным

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots - \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots \frac{n}{1} +$$
$$\frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Этот ряд должен быть продолжен до тех пор, пока какой-нибудь множитель не станет равным нулю или отрицательным. Заметим, что каждое отдельное произведение

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots, \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$$

должно состоять из стольких сомножителей, сколько единиц в (n – 1).

Упражнения. А) Пусть, например, требуется определить число шансов для того, чтобы выбросить 16 очков на четырех костях. Тогда

$$\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455, \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1}=336, \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}=6.$$

И 455 – 336 + 6 = 125, так что число шансов равно 125.

Б) Тот же вопрос, 15 очков, на шести костях. Тогда

$$\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=2002, \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1}=336,$$

2002 – 336 = 1666, и это и есть искомое число шансов.

В) Тот же вопрос, 27 очков на шести костях.

$$\frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=65780, \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1}=93024,$$

$$\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2}=30030, \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=1120,$$

65 780 – 93 024 + 30 030 – 1120 = 1666, и это и есть искомое число шансов.

Следствие. Количества очков, равноудаленных от крайних (возможных), всегда обладают одним и тем же числом шансов своего появления. Поэтому, если задается количество очков, расположенное ближе к бóльшему, а не к меньшему крайнему, то это количество можно вычесть из суммы крайних и тогда вычисления будут укорочены, если отыскивать число шансов для количества очков, равного полученной разности.

Пример 3. Найти в скольких попытках можно взяться выбросить 15 очков шестью костями.

Решение. Поскольку существует 1666 шансов, чтобы выбросить 15 очков и 44 990 шансов для противоположного события, следует разделить второе число на первое и частное 27 будет равно q. Умножим поэтому 27 на 0.7 и произведение 18.9 укажет, что число бросков почти равно 19.

Задача 6. Сколько испытаний следует сделать, чтобы появление события дважды стало вероятным, так чтобы игроки А и В, бьющиеся об заклад по этому поводу, могли с равной вероятностью утверждать и то, и другое, если событие имеет a шансов произойти в первом испытании и b шансов не появиться в нем.

Решение. Пусть искомое число испытаний равно x, тогда по доказанному выше будет ясно, что $(a + b)^x = 2b^x + 2axb^{x-1}$, или, приняв $a{:}b = 1{:}q$,

$$[1 + (1/q)]^x = 2 + 2x/q. \qquad (6.1)$$

Пусть вначале $q = 1$, тогда $x = 3$. Во-вторых, пусть q бесконечно, тогда x тоже бесконечно. Если $x = \infty$ и $x/q = z$, то уравнение принимает вид

$$1 + z + (1/2)z^2 + (1/6)z^3 + \ldots = 2 + 2z$$

и [$e^z = 2 + 2z$] z примерно равно 1.678[3], так что x всегда будет находиться между пределами $3q$ и 1.678, но x очень быстро сходится к $1.678q$, и, если q не слишком мало по сравнению с единицей, можно будет полагать, что $x = 1.678q$.

Если появится какое-либо подозрение в том, что x меньше, чем он должен быть, его значение следует подставить в уравнение (6.1), а ошибка [несоответствие] отмечена. Если ошибка не пренеберегаема, то x можно будет несколько увеличить, его новое значение [снова] подставить в указанное уравнение и отметить ошибку. Зная эти две ошибки, можно будет достаточно точно исправить x [ср. Задачу 19].

Пример 1. Требуется определить, в скольких попытках можно взяться дважды выбросить три единицы на трех костях.

Решение. Для выбрасывания трех единиц есть лишь один шанс и 215 шансов против этого, так что $q = 215$. Умножим 215 на 1.678, и произведение, 360.7 [360.8] укажет, что число попыток находится между 360 и 361.

Пример 2. Тот же вопрос, 15 очков на шести костях.

Решение. Для выбрасывания 15 очков есть 1666 шансов и 44 990 – против этого. Разделим второе число на первое и частное $27 = q$. Умножим 27 на 1.678 и произведение 45.3 укажет, что число попыток находится между 45 и 46.

Задача 7. Требуется определить, в скольких испытаниях событие может вероятно произойти 3, 4, 5, … раз, если в первом испытании оно имеет a шансов появиться и b шансов не наступить.

Решение. Обозначим искомое число испытаний через x. Из доказанного выше следует, что для трех и четырех появлений события, приняв $a:b = 1:q$,

$$[1 + (1/q)]^x = 2\left[1+\frac{x}{q}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2q^2}\right],\ 2\left[1+\frac{x}{q}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2q^2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3q^3}\right].$$

Продолжение ясно. В первом уравнении при $q = 1$ оказывается, что $x = 5q$, но если q бесконечно, или достаточно велико по сравнению с единицей, то оказывается, что $z = x/q$ примерно равно 2.675[4] и потому x всегда будет находиться между $5q$ и $2.675q$.

Во втором уравнении, если $q = 1$, то $x = 7q$, но если q бесконечно или достаточно велико по сравнению с единицей, то

$$z = \ln 2 + \ln[1 + z + z^2/2 + z^3/6] \approx 3.6719$$

и, см. Прим. 4, отношения пределов постепенно становятся близкими к 2:1.

Таблица пределов [указаны коэффициенты при q]

Если спор идет о единичном появлении события, то число испытаний окажется между	1 и 0.693	
Если о двух появлениях, то между	3 и 1.678	
Если о трех, то между	5 и 2.675	
Если о четырех, то между	7 и 3.6719	[3.672]
Если о пяти, то между	9 и 4.67	[4.670]
Если о шести, то между	11 и 5.668	

Если же спор идет о большем числе (n) появлений события, и если n и q достаточно велики по сравнению с единицей, то можно легко и без большого отклонения от истины высказать предположение о количестве испытаний, положив, что оно равно $(1/2)(2n - 1)q$ и кроме того, что x быстро стремится к меньшему пределу.

Задача 8. Трое игроков, A, B и C, катят мяч по очереди и выигрывает тот, кто первым наберет заданное число очков. После некоторого числа партий игроку A не хватает одного очка, игроку B – двух, и игроку C – трех очков. Требуется определить соотношение их ожиданий, если их мастерство находится в соотношении a:b:c.

Решение. Возвысим $(a + b + c)$ в четвертую степень (ибо, действительно, игра закончится не более, чем через 4 партии). Мы получим […]. Игроку A достанутся члены $(a^4 + 4a^3b + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4a^3c + 12abc^2)$, в которых a находится в степени, равной или более высокой, чем число недостающих у него очков, а b и c – в степени ниже числа партий, недостающих игрокам B и C. Таким же образом членами, относящимися к ожиданиям B и C, окажутся $(b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2)$ и $(4bc^3 + c^4)$. Все оставшиеся члены будут общими, и их следует поделить так, чтобы каждый игрок получил те из них, которые ему благоприятны. Поэтому части всех членов, в которые a вошло в первой или более высокой степени прежде, чем b достигнет второй степени, а c – третьей степени, благоприятны игроку A. И таким же образом определяются части членов, благоприятные B и C. Так, член $6a^2b^2$ может быть разделен на 6 частей, *aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa* и первые 5 должны быть приписаны игроку A и только последний – игроку B, т. е. A получит 5 a^2b^2, а B – a^2b^2. И если член $4ab^3$ разделить на части *abbb, babb, bbab, bbba*, то окажется, что первые две благоприятны A, а третий и четвертый благоприятны B и что поэтому каждый их них получит $2ab^3$. И если член $12ab^2c$ разделить […]. Полные ожидания окажутся равными

$$(a^4 + 4a^3b + 5a^2b^2 + 2ab^3 + 12a^2bc + 4a^3c + 6a^2c^2 + 8ab^2c + 12abc^2 + 3ac^3),$$
$$(b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + a^2b^2 + 2ab^3 + 4ab^2c),$$
$$(c^4 + 4bc^3 + ac^3).$$

[Исправлены три ошибки оригинала – Б. МакКлинтон; наше примечание: две исправил сам автор в 1756 г.]

Пусть теперь число всех остающихся партий равно n, число игроков p, а соотношение их шансов a:b:c:d … Тогда $(a + b + c + d + \ldots)$ следует возвести в степень $(n + 1 - p)$ и поступать аналогичным образом. [Пусть игрокам А, В, С, … не будет хватать б, в, г, … партий, тогда последнему из них не будет хватать [n – (б + в +г + …)] и фактически число остающихся партий может достичь (n + 1 – p).]

Задача 9. У играющих в три кости А и В имеется по 12 жетонов. Если у А выпадет 11 очков, он отдает жетон игроку В, а если у В выпадет 14 очков, он отдает жетон игроку А и побеждает тот, кто первым получит все жетоны. Требуется определить соотношение вероятностей выигрыша.

Решение. Пусть каждый имеет по p жетонов и a и b – количества шансов получения жетона игроками А и В друг от друга. Искомое соотношение будет равно $a^p{:}b^p$. В данном случае $a = 27$ и $b = 15$, но 27:15 = 9:5, так что пусть $a = 9$ и $b = 5$. Соотношение шансов окажется равным $9^{12}{:}5^{12}$ или 244 140 625:282 429 536 481, как это и заявил Гюйгенс.

Более общее решение. Пусть А имеет p жетонов, а В – q жетонов и А берется выиграть q жетонов у В до того, как В выиграет p жетонов. Соотношение их шансов окажется равным $a^q(a^p – b^p){:}b^p(a^q – b^q)$.

[Доказательство.] Пусть А имеет жетоны E, F, G, H, и т. д. числом p, а В – жетоны I, K, L, и т. д. числом q. Пусть, далее, стоимость каждого жетона относится к стоимости следующего как $a{:}b$, так что числа E, F, G, H, I, K, L находятся в геометрической прогрессии. Тогда А и В могут при каждом своем вступлении в игру ставить те жетоны, стоимости которых пропорциональны числу шансов их выигрышей в отдельной партии. Так, в первой партии А может поставить жетон H, а В – жетон I, но по предположению стоимости этих жетонов относятся как $a{:}b$ и потому А и В играют теперь на равных.

Если выиграет А, он в следующий раз сможет поставить жетон I, а В – жетон K, стоимости которых [снова] относятся как $a{:}b$. Если же [в первой партии] выиграет В, то А сможет поставить жетон G, а В – жетон H, стоимости которых находятся в том же соотношении, и т. д. Таким образом, сколько ни продолжалась бы игра, А и В всегда будут играть на равных, и поэтому их ожидания будут относиться как сумма членов E, F, G, H и т. д. числом p к сумме членов I, K, L и т. д. числом q, т. е. как $a^q(a^p – b^p)$ к $b^p(a^q – b^q)$, с чем следует легко согласиться, если просуммировать эти геометрические прогрессии.

Предположение о том, что каждый жетон относится [по стоимости] к следующему как $a{:}b$, не изменяет вероятностей выигрыша, и поэтому, если допустить, что стоимости жетонов одни и те же, вероятности победы всё еще останутся в найденном выше соотношении.

Остерегайтесь в сильнейшей степени, чтобы, исходя из какой-либо кажущейся аналогии, не спутать одну задачу с другой. Следующая задача по виду аналогична только что решенной.

Задача 10. Игрок С выбрасывает три кости. При выходе 11 очков он отдает один из своих 24 жетонов игроку А, а при выпадении 14 очков отдает жетон игроку В. Побеждает тот из последних двоих, кто первым соберет 12 жетонов. Требуется определить соотношение их ожиданий.

Игра закончится не более, чем после 23 партий; она не может длиться неопределенно долго, как описанная в предыдущей задаче, в которой выигрыши и проигрыши могли как-то чередоваться постоянно.

Решение. Возведем $(a + b)$ в 23-ю степень, и первые 12 членов разложения будут так относиться к последним 12, как ожидание A к ожиданию B.

Задача 11. Три игрока, A, B и C, играют с 12 жетонами, из которых 4 белых и 8 черных. Побеждает тот, кто первым вслепую выберет белый жетон. В игру они вступают поочередно, первым – A, затем B и C, снова A и т. д. Требуется определить соотношение их ожиданий.

Решение. Пусть жетонов будет n, из которых a белых и b черных и на кон ставится 1.

1) Игрок A имеет a шансов выбрать белый жетон и b шансов – выбрать черный, так что его ожидание вначале равно $a/(a + b)$ или a/n. Поэтому, вычитая a/n из 1, получим значение последующих ожиданий, равное $1 – a/n = b/n$.

2) Игрок B имеет a шансов выбрать белый жетон и $(b – 1)$ шансов выбрать черный, однако возможный выигрыш уже не 1, а только b/n, потому что он играет вслед за A. Таким образом, его ожидание равно

$$[a/(a + b – 1)] \cdot (b/n) = ab/[n(n – 1)].$$

Вычтем это из (b/n) и значение последующих ожиданий окажется равным $(nb – b – ab)/[n(n – 1)] = b(b – 1)/[n(n – 1)]$.

3) Игрок C имеет a шансов выбрать белый жетон и $(b – 2)$ шансов выбрать черный, и его ожидание окажется равным

$$ab(b – 1)/[n(n – 1)(n – 2)].$$

4) Таким же образом A имеет a шансов выбрать белый жетон и $(b – 3)$ шансов выбрать черный, и его ожидание оказывается равным

$$ab(b – 1)(b – 2)/[n(n – 1)(n – 2)(n – 3)].$$

И аналогично далее. Ряд ожиданий игроков может быть записан в виде

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n-1}P+\frac{b-1}{n-2}Q+\frac{b-2}{n-3}R+\frac{b-3}{n-4}S+...$$

где P, Q, R, S, … обозначают предыдущие члены с их знаками. Число членов должно быть принято равным числу единиц в $(b + 1)$, ибо попыток не более этого. А сумма каждого третьего члена, начиная с a/n, равна полному ожиданию игрока A. Аналогично, суммы третьих членов, начиная с $bP/(n – 1)$ и с $(b – 1)Q/(n – 2)$, равны полным ожиданиям игроков B и C соответственно.

Если игроков больше трех, и они выбирают либо по одному, либо по нескольку жетонов, либо даже различные количества жетонов, их ожидания могут быть легко найдены при помощи приведенного выше ряда.

Но вернемся к условию задачи. Пусть a = 4, b = 8 и n = 12. Тогда ряд преобразуется в

$$\frac{4}{12}+\frac{8}{11}P+\frac{7}{10}Q+\frac{6}{9}R+\frac{5}{8}S+\frac{4}{7}T+\frac{3}{6}V+\frac{2}{5}X+\frac{1}{4}Y.$$

Или, если умножить его на подходящее число, которое устранит все знаменатели, [но вовсе не на наименьший общий знаменатель], т. е. на 495, мы получим

165 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1.

Следовательно, игроки получат

A: 165 + 56 + 10 = 231; B: 120 + 35 + 4 = 159; C: 84 + 20 + 1 = 105

и их ожидания окажутся в соотношении 231:159:105 = 77:53:35.

Задача 12. Трое игроков, A, B и C, по очереди бросают правильный 12-гранник с четырьмя белыми гранями и восемью черными. Выигрывает тот, кто первым выбросит белую грань, и требуется определить соотношение их ожиданий.

Решение. Рассуждение здесь то же, что и в предыдущей задаче, но поскольку b и n не убывают, следует вместо (b – 1), (b – 2), … и (n – 1), (n – 2), … подставить их соответственно. Ряд из указанной задачи примет вид

$$\frac{a}{n}+\frac{ab}{n^2}+\frac{ab^2}{n^3}+\frac{ab^3}{n^4}+\frac{ab^4}{n^5}+...$$

и окажется бесконечным. Складывая по отдельности первый, четвертый, седьмой, …; второй, пятый, восьмой, …; третий, шестой, девятый, … члены, мы получим искомые ожидания:

$$\frac{a}{n}+\frac{ab^3}{n^4}+\frac{ab^6}{n^7}+...,\ \frac{ab}{n^2}+\frac{ab^4}{n^5}+\frac{ab^7}{n^8}...,\ \frac{ab^2}{n^3}+\frac{ab^5}{n^6}+\frac{ab^8}{n^9}+...$$

Но члены каждого из этих рядов представляют геометрическую прогрессию […] [со знаменателем n^3/b^3] и поэтому суммы рядов относятся как их первые члены, т. е. как (a/n):(ab/n^2):(ab^2/n^3) или как n^2:bn:b^2. Для данной задачи отношения равны 9:6:4.

Следствие. Если игроков более трех, а условия игры те же, следует взять членов по числу игроков и относящиеся друг к другу как n:b, и эти члены [по-прежнему] укажут соответствующие ожидания.

Задача 13. Игроки A и B кидают по две кости. Первый выигрывает, если выбросит 6 очков, а второй – если выбросит 7.

Первый начинает с одного броска, затем каждый поочередно выбрасывает кости дважды, пока один из них не победит. Требуется определить отношение их ожиданий.

Решение. Пусть А имеет a шансов выиграть, а В – b шансов, n – число исходов при двух костях, $n - a = d$ и $n - b = e$ и победитель получает 1.

1) Игрок имеет a шансов для выигрыша и $(n - a)$ – для проигрыша, так что его ожидание от первого броска равно a/n. Вычтем поэтому a/n из 1 и значение оставшегося ожидания будет равно $1 - a/n = d/n$.

2) Если очередь игры дойдет до В, его ожидание должно было бы быть b/n, но поскольку неясно, произойдет это или нет, указанное ожидание должно быть уменьшено в отношении d/n, потому что его выигрыш был бы не 1, а только d/n. Таким образом, до того, как А начнет игру, ожидание В равно bd/n^2. Вычтем это из d/n и остающееся ожидание будет равно $(d/n) - (bd/n^2) = ed/n^2$.

3) Таким же образом последующее ожидание В оказывается равным bed/n^3.

4) Последующее ожидание А – ae^2d/n^4.

5) И после этого ожидание А равно ae^2d^2/n^5.

И так последовательно для последующих. Все ожидания А, взятые совместно, будут равны

$$\begin{array}{ll} a/n + & \\ ae^2d/n^4 + & ae^2d^2/n^5 + \\ ae^4d^3/n^8 + & ae^4d^4/n^9 + \\ ae^6d^5/n^{12} + & ae^6d^6/n^{13} + \ldots \end{array}$$

Отделим на короткое время первый член a/n; оставшийся первый столбец определяет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $ae^2d/(n^4 - e^2d^2)$. Вернем назад первый член и прибавим его к этой сумме:

$$(nae^2d + an^4 - ae^2d^2)/[n(n^4 - e^2d^2)].$$

Второй столбец определит другую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $ae^2d^2/[n(n^4 - e^2d^2)]$ и полное ожидание А будет равно $(ae^2d + an^3)/(n^4 - e^2d^2)$. Полное ожидание В равно

$$\begin{array}{ll} bd/n^2 & + bed/n^3 + \\ be^2d^3/n^6 & + be^3d^3/n^7 + \\ be^4d^5/n^{10} + & be^5d^5/n^{11} + \ldots \end{array}$$

Сумма первого столбца равна $bdn^2/(n^4 - e^2d^2)$.

Сумма второго столбца равна $bden/(n^4 - e^2d^2)$.

Полная сумма ожиданий В равна $(bdn^2 + bden)/(n^4 - e^2d^2)$.

Если теперь вместо букв a, b, n, d, e подставить соответственно 5, 6, 36, 31 и 30, то искомое соотношение выразится в числах и будет равно 10 355:12 276.

Следствие. Если число случаев, в соответствии с которыми игроки могут выиграть, никогда не исчерпывается, и игра может продолжаться бесконечно, потому что при этом игроки могут в какой-то момент оказаться в тех же обстоятельствах, как и раньше, выражения их ожиданий будут конечными.

Задача 14. Взяв 12 жетонов, 4 из которых белые и 8 – черные, и играя против игрока B, A берется вслепую выбрать 7 жетонов, 3 из которых окажутся белыми. Требуется найти отношение их ожиданий.

Решение. Для выбора 7 жетонов из 12 имеется 792 шансов, как ясно следует из правила соединений:

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 792.$$

Отделим 3 белых и определим число шансов, при которых к ним можно будет прибавить 4 черных из 8. Всего таких шансов будет

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 70,$$

а так как для выбора 3 белых жетонов из четырех имеется 4 шанса, то умножим 70 на 4. Итак, для выбора трех белых и четырех черных имеется 280 шансов.

По правилам игры, если противное не указано прямо, игрок всё еще будет считаться победителем, если он выберет больше чем взялся белых жетонов. Поэтому, если выбрано 4 белых жетона и 3 черных, A должен будет считаться победителем. Отберем 4 белых жетона и найдем число шансов, в соответствии с которыми 3 черных жетона из восьми могут быть присоединены к ним. Это число равно

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

Поэтому A имеет 280 + 56 = 336 шансов, в соответствии с которыми он может стать победителем. Вычтем это число из 792, и разность, 456, будет числом шансов для победы B. Поэтому соотношение ожиданий равно 336:456 = 14:19.

Общий случай. Пусть число всех жетонов равно n, a из них белые и b – черные, c – число извлеченных жетонов. Тогда число всех шансов равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\ldots$$

и этот ряд должен будет содержать столько членов, сколько единиц в c.

Число шансов извлечь все c черных жетонов без единого белого равно

$$\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)(b-4)(b-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\ldots,$$

а для извлечения [(c – 1) черных и] одного белого –

$$\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)(b-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ldots\frac{a}{1}.$$

Для извлечения двух, трех, четырех белых

$$\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ldots\frac{a}{1}\frac{(a-1)}{2},\ \frac{b(b-1)(b-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ldots\frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{b(b-1)}{1\cdot 2}\ldots\frac{a}{1}\frac{a-1}{2}\frac{a-2}{3}\frac{a-3}{4}.$$

Задача 15. Каждый из трех равно искусных игроков A, B, C ставит по единице и играют на следующих условиях. Начинают игру двое; проигравший уступает место третьему. И подобное условие соблюдается неизменно, причем каждый проигравший выкладывает сумму p. Побеждает и забирает все накопленные деньги тот, кто выиграет две партии кряду. Начинают игру A и B, и требуется определить, насколько их ожидания меньше или больше ожидания игрока C.

Решение. Допустим, что игра продолжается вечно следующим образом:

A выигрывает у B; C выигрывает у A; B выигрывает у C и на кону окажется сумма 3 + 3p.

После повторения тех же результатов на кону окажется 3 + 6p, 3 + 9p и т. д. Пусть после первой партии присутствующий R предлагает A продать ему свое ожидание выигрыша, на что A отвечает:

Раз я только что выиграл у B, у меня равные шансы получить (3 + 2p) или нет, и это стоит (3 + 2p)/2. Если C выиграет у меня, моя очередь играть с ним может всё-таки подойти, и у меня окажутся равные шансы получить (3 + 5p) или нет, и это стоит (3 + 5p)/2. Но против наступления моей очереди будет соотношение 7:1 (ибо C должен будет еще выиграть у меня, B – у C и я – у B), так что указанное ожидание стоит (3 + 5p)/(2 · 8).

Таким же образом, после аналогичного вычисления, A замечает, что из дальнейшей игры он может ожидать (3 + 8p)/(2 · 8^2), затем (3 + 11p)/(2 · 8^3) и так до бесконечности.

Покупатель R, удостоверившись в верности расчета, уплачивает A сумму членов

$$\frac{3+2p}{2},\frac{3+5p}{2\cdot 8},\frac{3+8p}{2\cdot 8\cdot 8},\frac{3+11p}{2\cdot 8\cdot 8\cdot 8},\ldots,$$

которая может быть подсчитана в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Сумма ряда, продолженного до бесконечности, равна

$$\frac{n}{b}+\frac{n+d}{b^2}+\frac{n+2d}{b^3}+\frac{n+3d}{b^4}+...=\frac{n}{b-1}+\frac{d}{(b-1)^2}\ .$$

[*Доказательство.* Заданный ряд легко представить как сумму двух рядов, первый из которых – геометрическая прогрессия, второй же ряд есть разложение отрицательного квадрата.]

Разобьем ряд

$$\frac{3+2p}{2}+\frac{3+5p}{2\cdot 8}+\frac{3+8p}{2\cdot 8\cdot 8}+\frac{3+11p}{2\cdot 8\cdot 8\cdot 8}+...$$

на две части:

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 8\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}+...\right)+$$
$$\frac{p}{2}\left(2+\frac{5}{8}+\frac{8}{8\cdot 8}+\frac{11}{8\cdot 8\cdot 8}+\frac{14}{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}+...\right).$$

Первая представляет собой геометрическую прогрессию, сумма которой равна 12/7. Сумму второй части без ее первого члена и сомножителя $p/2$ можно найти по указанной теореме и она оказывается равной 5/7 + 3/49 = 38/49. Добавив 2 и умножив полученную сумму на $p/2$, получим $(68/49)p$. Итак, R уплачивает игроку A $12/7 + (68/49)p$.

Аналогично этому, R обращается с такой же просьбой к B. Согласившись, B при помощи такого же рассуждения испрашивает $3/7 + (31/49)p$; удостоверившись в верности расчета, R уплачивает эту сумму. Наконец, согласившись о том же с игроком C, он уплачивает ему $6/7 + (48/49)p$.

Пусть теперь A, выиграв у B, спрашивает другого присутствующего, S, согласен ли тот уплачивать за него все возможные будущие взносы p, и за сколько тот согласился бы выкупить его ожидание. На это S отвечает:

Поскольку Вы имеете равные шансы выиграть у C или проиграть ему, т. е. внести сумму p или нет, я согласен уплатить за Вас, если Вы дадите мне $p/4$. Но если C выиграет у Вас, а B – у C и Вам снова придется играть с C, я буду согласен снова уплатить за Вас p, если Вы дадите мне $p/2$. Впрочем, поскольку против этой возможности существует соотношение 3:1, я буду согласен уплатить за Вас, если Вы дадите мне [только] $p/8$. И, рассуждая таким же образом, я уплачу за Вас еще раз, если Вы дадите мне $p/16$, затем – $p/64$ и т. д.

Игрок A соглашается на это и уплачивает S сумму $5p/7$ ряда

$(1/2 + 1/8 + 1/16 + 1/64 + 1/128 + 1/512 + 1/1024 + …)p$, [состоящего из двух геометрических прогрессий].

Игроки B и C соглашаются с S на тех же условиях и уплачивают ему соответственно $(3/7)p$ и $(6/7)p$.

Таким образом, A получает от R $(12/7) + (68/49)p$

но уплачивает S $(35/49)p$

остаток в его пользу $(12/7) + (33/49)p$

однако, перед началом игры A внес 1,

так что его выигрыш составляет $(5/7) + (33/49)p$

Для B соответствующие суммы составят

$$(3/7) + (31/49)p$$

$$(21/49)p = (3/7)p$$

$$(3/7) + (10/49)p.$$

Но он уплатил $(1 + p)$ (1 – перед началом игры и p – после проигрыша игроку A), так что его выигрыш составит

$$-(4/7) - (39/49)p.$$

Сумма выигрышей A и B равна $(1/7) - (6/49)p$.

Мы предположили, что перед соглашением с R и S игрок A уже выиграл у B, но до начала игры B имел такой же шанс выиграть у A, поэтому каждый из них должен получить половину их общего выигрыша, а именно

$$(1/14) - (3/49)p.$$

Для подтверждения наших вычислений посмотрим, каков должен быть выигрыш C, применив тот же метод, что и выше. […]

Пусть теперь $(1/7) - (6/49)p = 0$, тогда $p = 7/6$. Поэтому, если взносы относятся к ставке как 7:6, игра будет на равных. Если это соотношение ниже, A и B будут играть на лучших условиях, а C – на худших; если же выше, то A и B будут играть на худших условиях, а C – на лучших.

Следствие 1. После того, как A выиграет у B, вероятности победы окажутся в соотношении (12/7):(6/7):(3/7) = 4:2:1, так что самая высокая вероятность окажется у A, затем – у C и самая низкая – у B.

Следствие 2. До начала игры присутствующий R может взяться уплатить все ставки и взносы, если получит за это $3 + 3p$.

Следствие 3. Если [количественные выражения] мастерства игроков находятся в заданных отношениях, их ожидания можно будет определить при помощи такого же рассуждения.

Следствие 4. Если взнос отрицателен, т. е. если проигрывающий получает небольшую долю общей ставки, а именно, трех единиц, например, 3/10, и игра должна закончиться после исчерпания ставок, ожидания игроков можно будет определить при помощи такого же рассуждения.

Следствие 5. Если игроков более трех, и игра не заканчивается, пока один из них не победит кряду всех остальных, соотношения их ожиданий всё же может быть найдено.

Следствие 6. Если взнос не постоянен, а непрерывно повышается или понижается в соответствии с предусмотренным правилом, эти соотношения всё еще могут быть определены, если не конечным выражением, то по крайней мере рядом, который неизменно стремится к истине.

Задача 16. Одинаково опытные игроки А и В катают заданное число шаров. После некоторого числа партий первому для победы не хватает 1 очка, второму – 2 очка. Требуется определить соотношение их ожиданий.

Решение. Пусть шаров m, так что каждый получит $m/2$ и p и q – количества шансов для двух или более и, соответственно, для одного или более шаров игрока В оказаться ближе к цели, так что $(q - p)$ – это число шансов в точности одному из его шаров оказаться ближе. Пусть s – число всех возможных исходов и полная ставка равна 1.

Ясно, что В имеет p шансов выиграть 1 и $(q - p)$ шансов выиграть 1/2 и его ожидание поэтому равно[5]

$$[p + (1/2)q - (1/2)p] \text{ ч } s = [(1/2)p + (1/2)q] \text{ ч } s.$$

Но из учения о соединениях известно, что m шаров могут соединяться $m!$ способами и потому $s = m!$. Из того же учения следует, что два шара из $m/2$ можно переставить $m/2[(m/2) - 1]$ способами, оставшиеся же у игроков шары числом $(m - 2)$, – $(m - 2)!$ способами и потому

$$s{:}p = m(m - 1) \text{ ч } m/2[(m/2) - 1] = (m - 1) \text{ ч } [(m/4) - (1/2)],$$

$$p = [(ms/4) - (s/2)] \text{ ч } (m - 1). \qquad (16.1)$$

Ясно, что $m/2$ шаров можно выбрать столькими же способами, а все оставшиеся шары, число которых $(m - 1)$, можно переставить $(m - 1)!$ способами и потому

$$s \text{ ч } q = m \text{ ч } (m/2) = 1 \text{ ч } (1/2),$$

$$q = s/2 = [(ms/2) - (s/2)] \text{ ч } (m - 1). \qquad (16.2)$$

Таким образом,

$$\frac{p/2 + q/2}{s} = \frac{3m/8 - 1/2}{m - 1}.$$

Вычтем это из 1 и остаток $[(5m/8) - (1/2)] \text{ ч } (m - 1)$ будет ожиданием А, а искомое соотношение окажется равным $[(5m/8) - (1/2)] \text{ ч } [(3m/8) - (1/2)] = (5m - 4) \text{ ч } (3m - 4)$.

Следствие 1. При бесконечном числе шаров отношение ожиданий станет равным 5:3.

Следствие 2. При неравной опытности игроков ожидания найдутся аналогичным образом.

Задача 17. Одинаково опытные игроки А и В катают заданное число шаров. После некоторого числа партий первому для победы недостает 1 очка, второму – 3. Требуется определить соотношение их ожиданий.

Решение. Пусть, как и в предыдущей задаче, m – число шаров, r, p, q количества шансов, соответственно, для трех и более, двух и более, и одного и более шаров игрока В оказаться ближе к цели. И пусть s – число всех возможных исходов. Тогда В имеет r шансов выиграть 1, $(p - r)$ шансов выиграть 1/2 и $(q - p)$ шансов выиграть $(3m - 4)$ ч $(8m - 8)$, что ясно из предыдущего. Сумма его ожиданий будет равна будет равна

$$\frac{r \cdot 1 + (p - r) \cdot (1/2) + (3m - 4)/(8m - 8)}{s} =$$
$$\frac{(1/2)r + (1/2)p + (3m-4)(q-p)/(8m-8)}{s}. \qquad (17.1)$$

Три из $m/2$ шаров можно переставить $(m/2)\,[(m/2) - 1]\,[(m/2) - 2]$ способами, а все $(m - 3)$ шара, оставшиеся у обоих игроков, – $(m - 3)!$ способами. Поэтому

$$r = (m/2)\,[(m/2) - 1]\,[(m/2) - 2](m - 3)$$

и

$$s = m!,\ r = \frac{ms/8 - s/2}{m-1}.$$

Но p и q определяются по формулам (16.1) и (16.2). Подставляя эти значения r, p, q, получим ожидание В, равное

$$\frac{9m^2 - 26m + 16}{32m^2 - 64m + 32}.$$

Вычтем его из 1, и ожидание А окажется равным

$$\frac{23m^2 - 38m + 16}{32m^2 - 64m + 32},$$

а соотношение их ожиданий, при любом числе шаров кроме двух –

$$\frac{23m^2 - 38m + 16}{9m^2 - 26m + 16}. \qquad (17.2)$$

Чтобы найти ожидания А и В при игре одним или двумя шарами, вернемся к общему выражению для ожидания игрока В (17.1) и примем $r = p = 0$. Тогда это ожидание станет равным

$$\frac{(3m-4)q}{(8m-8)s} = \frac{m/2 - 1/2}{m-1}\,\frac{3m-4}{8m-8} = (1/2)\cdot(2/8) = 1/8.$$

Вычитая это число из 1, получим ожидание А, равное 7/8, а соотношение ожиданий А и В в этом случае оказывается равным 7:1, что согласуется с принципами, давно уже установленными другими авторами [?].

Следствие 1. При бесконечном числе шаров соотношение ожиданий стало бы равным 23:9 [см. (17.2)].

Следствие 2. Если игрокам для победы недостает любого [другого] числа очков, то соотношение их ожиданий можно определить тем же самым рассуждением.

Следствие 3. Соотношение ожиданий может быть также найдено, если умение игроков находится в известной пропорции.

Задача 18. Игрок А берется выкинуть определенные грани [определенное число граней] кости с заданным числом граней при заданном числе бросков. Требуется определить его ожидание.

Решение. Пусть число граней равно $(p + 1)$, n – число бросков и f – число граней, которые игрок взялся выкинуть. Число шансов для выкидывания одной или более единиц в n испытаниях равно $[(p + 1)^n - p^n]$, что ясно из доказанного выше.

Пусть двойка убрана с кости, которая теперь имеет лишь p граней. Тогда число шансов для того же результата будет равно $[p^n - (p - 1)^n]$. Поэтому, при восстановлении двойки число шансов выбросить 1 и 2 будет равно $[(p + 1)^n - 2p^n + (p - 1)^n]$. Пусть теперь убрана тройка. Тогда число шансов для выкидывания 1 и 2 будет равно $[p^n - 2(p - 1)^n + (p - 2)^n]$ и поэтому при восстановлении тройки число шансов, при которых А может выкинуть 1, 2 и 3, окажется равным

$$[(p + 1)^n - 3p^n + 3(p - 1)^n - (p - 2)^n].$$

И так же для дальнейшего.

Итак, запишем все степени по порядку, чередуя их знаки

$$[(p + 1)^n - p^n + (p - 1)^n - (p - 2)^n + (p - 3)^n - \dots].$$

Предварим их коэффициентами бинома, возведенного в степень f, так что сумма полученных членов будет числителем ожидания А, а знаменателем, – $(p + 1)^n$.

Пример 1. Пусть число граней кости равно шести, и требуется выкинуть 2 грани при восьми попытках. Тогда ожидание А будет равно $(6^8 - 2 \cdot 5^8 + 4^8)/6^8$.

Пример 2. При том же числе граней требуется выкинуть их все при 12 попытках. Тогда ожидание А будет равно […]

Пример 3. Игрок А бьется об заклад с В, обязуясь либо выкинуть 2 грани 36-гранной кости[6] в 43 попытках, либо при том же числе бросков выкинуть 2 единицы и 2 двойки на двух обычных костях. Его ожидание будет равно […].

Заметим, что слагаемые, из которых составлены эти ожидания, легко могут быть вычислены при помощи таблицы логарифмов.

Задача 19. Найти при скольких попытках выкидывание заданных граней [заданного числа граней] на кости с заданным их числом окажется вероятным.

Решение. Пусть, как и раньше, число граней кости равно (p + 1), f – число граней, которые требуется выкинуть, и n – искомое число попыток. [Автор перепутал n и f. Мы исправили эту ошибку. Б. МакКлинток.] Положим

$$\ln\frac{1}{1-(1/2)^{1/f}}=\alpha, \ln\frac{p+1}{p}=\beta$$

и окажется, что n почти равно *б/в*.

Доказательство. При f = 6 ожидание А равнялось бы […]. Допустим, что члены (p + 1), p, (p – 1), … находятся в геометрической прогрессии, что лишь немного уклоняется от истины, особенно если p достаточно велико по сравнению с 1, и положим p^n ч $(p + 1)^n$ = 1 ч r^n. Тогда ожидание А окажется равным

$$1-\frac{6}{r^n}+\frac{15}{r^{2n}}-\frac{20}{r^{3n}}+\frac{15}{r^{4n}}-\frac{6}{r^{5n}}+\frac{1}{r^{6n}}=\frac{1}{2}.$$

Извлечем корень шестой степени из обеих частей:

$$1 - 1/r^n = \sqrt[6]{1/2}\,,\ r^n = 1 \text{ ч } [1-\sqrt[6]{1/2}\,].$$

При указанных выше значениях *б* и *в* [и определении r] окажется, что *nв* = *б* и поэтому n = *б/в.* Доказательство для остальных случаев то же самое.

Если остается какое-нибудь сомнение в том, что найденное значение n недостаточно точно, его можно подставить и отметить ошибку [расхождение], затем немного изменить это значение и отметить вторую ошибку. При помощи обеих найденных ошибок можно достаточно точно исправить n по правилу ложного положения.

Найденное таким образом n можно подправить бесконечным рядом, выведенным исходя из сути задачи, причем его первым членом надо будет считать назначенное нами значение. Впрочем, для практических целей достаточно исправление и по разностям ошибок.

Пример 1. Найти в скольких попытках с обычной костью выход всех ее граней окажется вероятным.

$$\ln\frac{1}{1-(1/2)^{1/6}}=0.9621753,\ \ln 6/5 = 0.0791812$$

и n оказывается равным отношению этих чисел, т. е. несколько бульшим 12 [12.15].

Теперь можно заключить, что искомое число попыток будет примерно равно 12, и если подставить 12 в уравнение, соответствующее этому случаю, ожидание А окажется равным почти 0.437, т. е. несколько меньшим, чем оно должно быть, а именно меньшим 0.5. Примем поэтому n = 13 и ожидание А будет равно 0.513, т. е. превышать требуемое. Можно, стало быть, с преимуществом браться выкинуть все грани за 13 попыток.

Пример 2. В скольких попытках будет вероятным выход шести заданных граней 216-гранной кости? Или, выход всех трех [raffles Б. МакКлинток[7]] при трех обычных костях?

$$\ln\frac{1}{1-(1/2)^{1/6}} = 0.9621753,\ \ln 216/215 = 0.0020152$$

и n оказывается равным отношению этих чисел, т. е. почти равным 477.

О продолжительности игры

Задача 20. Мастерство игроков А находится в соотношении a:b к мастерству В. Они играют на следующих условиях. Если А (В) выиграет партию, В (А) отдает ему жетон, и они не заканчивают игру, пока один из них не заберет всех жетонов у другого. Более того, присутствующий R утверждает, что игра закончится не более, чем в заданное число партий, а присутствующий S отрицает это. Требуется определить ожидание S.

Решение. Случай 1. Пусть игроки имеют по 2 жетона, а R и S держат пари на 2 партии. Раз спор идет о двух партиях, возведем (a + b) в квадрат […]. Член $2ab$ благоприятен для S, остальные же против него, и его ожидание будет равно $2ab/(a + b)^2$.

Случай 2. Пусть игроки имеют по 2 жетона, а спор идет о трех партиях. Возведем (a + b) в куб […]. Члены a^3 и b^3 неблагоприятны для S, остальные два члена […] частично благоприятны, частично нет. Разделим их поэтому на части, а именно на *aab, aba, baa*, и *abb, bab, bba*. Части $aba + baa + abb + bab = 2a^2b + 2ab^2$ благоприятны для S, остальные – нет, и поэтому ожидание S будет равно $(2a^2b + 2ab^2)/(a + b)^3 = 2ab/(a + b)^2$, т. е. оказывается тем же, что и в предыдущем случае.

Случай 3. Пусть игроки имеют по 2 жетона, а спор идет о четырех партиях. Возведем (a + b) в четвертую степень […]. Все члены $a^4 + 4a^3b + 4ab^3 + b^4$ будут неблагоприятны для S, и лишь член $6a^2b^2$ частично ему благоприятен. Разделим поэтому его на части, и благоприятными для S будут […] или $4a^2b^2$, так что его ожидание оказывается равным $4a^2b^2/(a + b)^4$.

Случай 4. Пусть игроки имеют по 2 жетона, а спор идет о пяти партиях. Ожидание S оказывается тем же, что и в предыдущем случае.

Случай 5. Пусть игроки имеют по 2 жетона, а спор идет о шести партиях. Ожидание S будет равно $8a^3b^3/(a + b)^6$.

Общий случай. Пусть игроки имеют по 2 жетона, а спор идет о (2 + d) партиях. Ожидание S будет равно $(2ab)^{1+d/2}/(a + b)^{2+d}$.

Заметим, что d – четное число. В противном случае ожидание S не изменится, если это число уменьшить на единицу.

Случай 6. Пусть игроки имеют по 3 жетона, а спор идет о (3 + d) партиях. Ожидание будет равно $(3ab)^{1+d/2}/(a + b)^{3+d}$. [Следует то же замечание о четности/нечетности.]

Случай 7. Пусть игроки имеют по 4 жетона, а спор идет о четырех партиях. Ожидание S будет равно

$$(4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3)/(a + b)^4. \qquad (20.1)$$

Случай 8. Пусть игроки имеют по 4 жетона, а спор идет о шести партиях. Ожидание S будет равно […].

Таблица ожиданий S при четырех жетонах у каждого игрока

4	$(4a^3b+6a^2b^2+4ab^3)/(a+b)^4$
6	$(14a^4b^2+20a^3b^3+14a^2b^4)/(a+b)^6$
8	$(48a^5b^3+68a^4b^4+48a^3b^5)/(a+b)^8$
10	$(164a^6b^4+232a^5b^5+164a^4b^6)/(a+b)^{10}$
12	$(560a^7b^5+792a^6b^6+560a^5b^7)/(a+b)^{12}$
	etc.

В первом столбце указано число партий, о которых идет спор

Эту таблицу легко продолжить, если учесть следующее.

1. Коэффициент первого члена каждого числителя равен сумме коэффициентов всех членов предшествующего числителя.
2. Коэффициент второго члена равен указанной сумме плюс коэффициент второго члена предшествующего числителя.
3. Коэффициент третьего члена равен коэффициенту первого.
4. Произведения букв могут быть получены умножением соответствующего произведения из предшествующей строки на *ab*.
5. Степени всех знаменателей равны числу тех партий, о которых идет спор.

И оказывается, что все коэффициенты могут быть образованы[8] …

Общее правило. Пусть игроки имеют по n жетонов и спор идет о $n + d$ партиях. Возведем $(a + b)$ в n-ю степень и отбросим оба крайних члена; умножим оставшуюся сумму на $(a^2 + 2ab + b^2)$ и отбросим крайние члены; остаток снова умножим на ту же величину и отбросим крайние члены, и так столько раз, сколько единиц в $d/2$. Окончательное произведение будет числителем ожидания S, а знаменатель будет равен $(a + b)^{n+d}$. Если d нечетно, то вместо него следует подставить $(d – 1)$. Если нечетно n, числитель и знаменатель полученного ожидания можно сократить на $(a + b)$.

Пример 1. Пусть мастерство игроков одно и то же и они имеют по 4 жетона, а спор идет о 10 партиях. Требуется определить ожидание S. Здесь $n = 4$, $n + d = 10$, а потому $d = 6$. […] Возведем $(a + b)$ в четвертую степень; отбрасывая каждый раз крайние члены, будем трижды умножать разложения на $(a^2 + 2ab + b^2)$. […] Ожидание S будет равно дроби, числителем которой служит полученный многочлен

$(164a^6b^4 + 232a^5b^5 + 164a^4b^6)$, а знаменателем – $(a + b)^{10}$.

Поскольку $a = b$, это ожидание оказывается равным

$$(164 + 232 + 164) \div 2^{10} = 560/1024 = 35/64.$$

Пример 2. Пусть игроки имеют по 5 жетонов и спор идет о 10 партиях, так что S отрицает, что игра закончится в 10 партиях, а мастерство у A вдвое выше, чем у B.

Тогда $n = 5$, $n + d = 10$, $d = 5$. Поскольку d нечетно, оно должно быть принято равным 4, так что $d/2 = 2$. Возведем $(a + b)$ в пятую степень; отбрасывая каждый раз крайние члены, будем дважды умножать разложение на $(a^2 + 2ab + b^2)$. […] Ожидание S будет равно

$$\frac{75a^6b^3 + 125a^5b^4 + 125a^4b^5 + 75a^3b^6}{(a+b)^9}.$$

Поскольку n нечетно, сократим эту дробь на $(a + b)$ [при $a + b = 0$ обе части дроби обращаются в нуль] и ожидание станет равным […]. Подставив $a = 2$ и $b = 1$, получим $8 \cdot 25 \cdot 19/6561 = 3800/6561$.

Задача 21. Пусть игроки имеют по 4 жетона. Требуется определить, насколько мастерство одного должно превосходить мастерство другого, если R, который бьется об заклад с S, мог бы утверждать на равных, что игра закончится через 4 партии.

Решение. Только что найденное ожидание S оказалось равно (20.1), а поскольку R и S спорят на равных, оно должно равняться 1/2. Поэтому

$$\frac{4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^3b^3}{(a+b)^4} = \frac{1}{2},\ a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = 0.$$

Прибавим $12a^2b^2$ к каждой части этого равенства и извлечем квадратный корень из каждой:

$$a^2 - 2ab + b^2 = ab\sqrt{12}$$

или, при $a{:}b = z{:}1$,

$$z^2 - 2z + 1 = z\sqrt{12},\ z_1 = 5.274,\ z_2 = 1/5.274,$$

т. е. искомое соотношение равно либо 5.274, либо 1/5.274.

Задача 22. При тех же условиях определить то же соотношение, если, однако, шансы R и S относятся как 3:1.

Решение. Ожидание S равно (20.1) и, ввиду указанного соотношения шансов, оно должно равняться 1/4. При $a{:}b = z{:}1$ оказывается, что

$$z^4 - 12z^3 - 18z^2 - 12z + 1 = 0.$$

[В оригинале предпоследний член равнялся $12z^3$. Б. МакКлинток.]

Прибавим [как в Задаче 61 *Учения о шансах* 1756 г., а не как в данном мемуаре] к каждой части этого уравнения $56z^2$ и извлечем квадратный корень из каждой:

$$z^2 - 6z + 1 = z\sqrt{56},\ z^2 - 13.483z + 1 = 0,\ z_1 = 13.407,\ z_2 = 1/13.407.$$

Поэтому a:b равно либо 13.407, либо 1/13.407.

Задача 23. Определить то же соотношение при четырех жетонах у каждого игрока, если количество партий принято равным шести, а R и S спорят на равных.

Решение. При указанных условиях ожидание S равно

$$\frac{14a^4b^2 + 20a^3b^3 + 14a^2b^4}{(a+b)^6}.$$

Оно должно равняться 1/2. […] При a:b = z:1 оказывается, что

$$z^6 + 6z^5 - 13z^4 - 20z^3 - 13z^2 + 6z + 1 = 0.$$

Допустим, что это уравнение получено из двух других,

$$z^2 + yz + 1 = 0,\ z^4 + pz^3 + qz^2 + pz + 1 = 0. \qquad (23.1a;\ b)$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты, получим уравнения

$$y + p = 6,\ 1 + py + q = -13 \qquad (23.2a;\ b)$$

или

$$py + q = -14,\ 2p + qy = -20, \qquad (23.3a;\ b)$$

откуда

$$y^3 - 6y^2 - 16y + 32 = 0^{\mathbf{9}}. \qquad (23.4)$$

Один из корней этого уравнения равен – 2.9644. Подставив это значение в уравнение (23.1a), мы получим новое уравнение

$$z^2 - 2.9644z + 1 = 0, \qquad (23.5)$$

корни которого равны 2.576 и 1/2.576. Таким образом, если соотношение мастерства игроков равно любому из этих корней, R и S будут спорить на равных. [Приняв y = 3 и разделив левую часть (23.4) на (y + 3), мы получили бы квадратное уравнение с положительными корнями, а оба корня уравнения (23.5) оказались бы в обоих соответствующих случаях отрицательными.]

Следствие. Степени всех уравнений указанного вида, при которых соотношение мастерства отыскивается по заданным количествам жетонов и известному числу партий, могут быть уменьшены по меньшей мере вдвое по сравнению с последним указанным числом. Далее, коэффициенты членов, равноудаленных от концов, всегда оказываются равными друг другу. Таким образом, если предположено, что эти уравнения образуются из (23.1a). [Первый член в оригинале был y^2. Б. МакКлинток.]
и из другого уравнения с совпадающими коэффициентами у членов, равноудаленных от концов, то число сравнений

коэффициентов не будет превышать половины числа партий и степень y окажется по меньшей мере вдвое ниже, чем у z.

Задача 24. Пусть условия будут теми же, как и в Задаче 20, но игроки имеют соответственно p и q жетонов. Требуется определить ожидание S.

Решение. Следует взять бином $(a + b)$ и, отбрасывая каждый раз те члены, степень a в которых превосходит степень b на q, а также и те, степень b в которых превосходит степень a на p, умножать остающиеся члены на $(a + b)$. Число умножений должно равняться числу единиц в заданном числе партий минус 1. Так мы получим числитель искомого ожидания, знаменатель которого равен $(a + b)$ в степени, равной числу партий.

Пример. Пусть $p = 3$ и $q = 2$, а число партий – 7. […] Ожидание S будет равно $(13a^4b^3 + 21a^3b^4)$ ч $(a + b)^7$.

Задача 25. Два игрока, A и B, мастерства которых находятся в заданном отношении a:b, договариваются играть до тех пор, пока не сыграют определенного числа партий n. Присутствующие R и S бьются об заклад: первый утверждает, что в течение игры A выиграет на $(n – d)$ партий больше, чем B. Требуется определить его ожидание.

Решение. Возведем $(a + b)$ в степень n; если d нечетно, отберем столько членов разложения, сколько единиц в $(d + 1)/2$. Отберем столько же последующих членов, изменив их коэффициенты. Именно, присоединим к ним коэффициенты предыдущих членов, взятых в обратном порядке. Если же d четное, то следует взять столько же членов разложения $(a + b)^n$, сколько единиц в $(d + 2)/2$ и столько же последующих членов, сколько единиц в $d/2$, предваряя их таким же образом коэффициентами предшествующих членов, взятых в обратном порядке, но не учитывая последний из них. Мы получим числитель искомого ожидания, знаменателем которого будет $(a + b)^n$.

Пример 1. Пусть игра должна продолжаться 10 партий, 3 – число партий, которые A должен выиграть у B в течение игры и мастерство игроков одинаково. Возведем $(a + b)$ в 10-ю степень […]. Имеем $n = 10$, $n – d = 3$, поэтому $d = 7$, $(d + 1)/2 = 4$. Возьмем поэтому 4 члена разложения, а именно […]. Следующие 4 члена с измененными коэффициентами будут […]. Ожидание R окажется равным

$$\frac{a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+120a^6b^4+45a^5b^5+10a^4b^6+1a^3b^7}{(a+b)^{10}}=\frac{352}{1024}.$$

Пример 2. Пусть $n = 6$, $n – d = 4$ и следовательно $d = 2$ и $(d + 2)/2 = 2$. Ожидание R окажется равным

$$\frac{a^6+6a^5b+a^4b^2}{(a+b)^6}.$$

Заметим, что при нечетном d искомую дробь можно сократить на $(a + b)$.

Задача 26. Мастерство игроков A и B находится в заданном отношении $a:b$. Они договариваются не заканчивать игру, пока не сыграют заданного числа партий. Присутствующие R и S бьются об заклад; первый утверждает, что в течение игры A выиграет у B заданное число партий p, а B выиграет у A заданное число партий q. Требуется определить ожидание R.

Решение. Число шансов для выигрыша заданного числа партий q игроком A может быть найдено в решении Задачи 25 и там же можно найти соответствующее число шансов для выигрышей B. Наконец, число шансов, в соответствии с которыми никто не может выиграть у своего противника, можно найти в Задаче 24.

Сложим все эти случаи и вычтем из вычисленной суммы $(a + b)^n$. Мы получим числитель ожидания R, знаменатель которого равен $(a + b)^n$.

Пример. R утверждает, что если заданное число партий 7, то A выиграет 2 партии, а B – 3 партии. Число шансов для первого события равно […], для второго – […], а число шансов, в соответствии с которыми не выиграет никто – […].

Сумма всех этих шансов равна […]. Вычтем из нее $(a + b)^7$, разность окажется равной […]. Таким образом, ожидание R равно a^2b^5 ч $(a + b)^7$.

Примечания

1. В отличие от Гюйгенса и Якоба Бернулли (чье посмертное сочинение к тому времени еще, правда, не вышло) Муавр не обосновывает этого утверждения, что вполне соответствует современным представлениям: ожидание вводится по определению. О. Ш.

2. В дальнейшем мы употребляем не очень подходящее выражение *соотношение мастерства игроков*. О. Ш.

3. Мы не включили нескольких непонятных строк, которых уже нет в Задаче 4 *Учения* автора, изд. 1756 г. О. Ш.

4. Следует несколько непонятных строк, которых уже нет в Задаче 5 *Учения* автора, изд. 1756 г. Ср. Прим. 3. О. Ш.

5. Мы не нашли правил этой игры. О. Ш.

6. Правильных выпуклых 36-гранников не существует. И Муавр, и другие авторы того времени спокойно вводили несуществующие игральные кости, но, конечно, лишь с методической целью. О. Ш.

7. Этот термин неоднозначен. В соответствии с вычислениями (см. ниже), Муавр должен был иметь в виду выход трех одинаковых и притом заранее определенных граней. О. Ш.

8. Следующие несколько строк непонятны. Вот оригинальный текст (О. Ш.):

… all the coefficients can be generated, the first from the first, the second from the second. Further, if the penultimate, being doubled, is subtracted from the preceding ultimate multiplied by four, the required coefficient will arise.

9. Нам не удалось получить уравнения (23.1) – (23.4). О. Ш.

II

Э. Молина

Теория вероятностей: несколько замечаний об *Аналитической теории вероятностей* Лапласа

E. C. Molina, The theory of probability:
Some comments on Laplace's *Thйorie analytique.*
Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36, 1930, pp. 369 – 392

От переводчика

Статья Molina безусловно интересна, но нуждается в комментарии. Он так и не сказал, что теорию вероятностей Лапласа пришлось строить заново, что уже стало заметно к 1930 г. Не введя хотя бы эвристического определения случайной величины (это сделал Пуассон), он не смог рассматривать плотности распределения и характеристические функции как математические объекты.

Теорию вероятностей Лаплас фактически считал прикладной математической дисциплиной, а ее целью – открытие законов природы. Далее, автор ничего не сказал о центральной предельной теореме, несколько вариантов которой Лаплас нестрого доказал и широко использовал.

Лаплас нисколько не заботился о методической стороне своей *Аналитической теории вероятностей* (АТВ); на исключительную сложность его математического стиля указывали многие авторы, например, американский астроном Боудитч, переводчик *Небесной механики* на английский язык, мнение которого можно отнести и к АТВ (Тодхантер 1865, с. 478):

Всякий раз, когда я вижу [у него] *слова* *<u>таким образом, очевидно, что</u>, я знаю, что только часы и может быть дни тяжелого труда позволят мне понять, каким образом это очевидно*.

Более того, Лаплас каким-то образом ухитрялся получать верные результаты при помощи нестрогих, а иногда и ошибочных математических рассуждений; мы можем сослаться на Прим. 16 (на его вывод дифференциального уравнения) и на статью Гнеденко и Шейнин (1978, с. 194 – 195). Добавим, что АТВ представляет собой не единое математическое целое, а скорее лабиринт.

К аналитическим открытиям Лапласа, рассмотренным автором, можно добавить введение им интегралов от функций комплексного переменного, притом интересно, что Лаплас (например, в АТВ, на с. 304) несколько раз добавил по этому поводу, что неплохо бы *математикам* взяться за них. Себя он к ним, стало быть, не относил. Полагаем, наконец, что автор уделил непомерное внимание обобщению теоремы Бейеса, которое просто напрашивалось, но упустил исследование Мизеса (1919, § 9.2), который доказал, что роль априорных вероятностей действительно (как полагал Пуанкаре, см. конец п. 6) снижается по мере возрастания числа наблюдений.

Молина несколько раз сослался на *Похвальное слово* Фурье, перевод которого мы включили в этот сборник.

1. Введение

Вокруг трудов Лапласа по теории вероятностей выросла стена искаженных сведений, и виновен в этом историк[1], ошибки которого подхватили другие, не ознакомившиеся с источниками. Я имею в виду указать на некоторые ошибки, пока они не станут считаться истиной ввиду постоянного повторения. Подобное бездумное поведение не только несправедливо по отношению к Лапласу, оно приводит к неразберихе в той области, в которой ясное логическое мышление имеет первостепенное значение.

Труды автора *Небесной механики* по теории вероятностей и ее приложениям начали появляться с 1774 г.; продолжаясь почти полстолетия, они завершились четвертым дополнением к третьему изданию АТВ [1820, перепечатка 1886 г.], первое издание которой вышло в 1812 г.

Мои комментарии будут в особенности относиться к зрелому труду Лапласа, изложенному в двух книгах (томах) АТВ. За исключением оговоренных случаев, они будут в равной мере относиться и к первому, и к третьему ее изданиям, и, видимо, ко второму.

В своем похвальном слове после смерти Лапласа Фурье [III, п. 5] указал:

Нельзя утверждать, что ему было дано создать совершенно новую науку … Он был рожден, чтобы всё совершенствовать, исчерпывать, чтобы раздвигать границы познанного и решать то, что, возможно, полагалось неразрешимым. Будь это возможно, он завершил бы науку о небе.

Ту же характерную черту находим мы в его исследованиях по анализу вероятностей, этой огромной и вполне современной науке, цель которой часто не понимается, что приводит к самым неверным истолкованиям, хотя приложения ее когда-нибудь охватят всё поле человеческих познаний.

Кратко остановившись на роли Паскаля, Ферма, Гюйгенса, Якоба Бернулли, Стирлинга, Эйлера, Лагранжа, Даламбера и Кондорсе[2] в создании и развитии теории вероятностей, Фурье [III, п. 6], затем подытожил вклад Лапласа и обрисовал ее будущее:

Лаплас объединил и установил ее принципы. И возникла новая наука, подчиненная единому аналитическому методу и простирающаяся необычайно широко. Плодовитая полезными приложениями, она когда-нибудь ярко осветит все отрасли натуральной философии [физики].

Речь Фурье дает повод для трех вопросов, относящихся к теории вероятностей:

1. Каково фактическое содержание АТВ?

2. Как ее результаты, методы и содержащиеся в ней взгляды соотносятся с нынешним состоянием теории вероятностей и статистической теории?

3. Насколько был Лаплас обязан своим предшественникам?

Исчерпывающе рассмотреть хотя бы один из этих вопросов здесь невозможно. По поводу третьего я ограничусь Бейесом, результаты которого должны быть тщательно отделены от работы Лапласа, поскольку дело идет о вероятностях причин. Первым вопросом я займусь в достаточной степени по меньшей мере для того, чтобы мои замечания по второму вопросу оказались понятными. Этот последний можно высказать иными словами:

В какой степени тот, кто хорошо ознакомится с АТВ, окажется в контакте с нынешним состоянием теории вероятностей, и насколько прочно то основание, которое там обнаружится, для ее приложений в статистике?

Этот вопрос будет ключевым для моих замечаний.

2. Производящие функции

Они являются центральным аналитическим понятием АТВ. Вводятся они в 1-й главе 1-й книги и появляются и на последней странице последнего приложения к ее третьему изданию. Вот определение такой функции:

Пусть y_x будет какой-либо функцией от x. Если образовать бесконечный ряд

$$y_0 + y_1t + y_2t^2 +\ldots + y_xt^x + y_{x+1}t^{x+1} +\ldots + y_\infty t^{\infty},$$

то всегда можно будет отыскать такую функцию от t, которая, при ее разложении по степеням t, представит этот ряд. И эту функцию я называю <u>производящей функцией</u> y_x.

Развитие этого понятия и его применение в чистой математике, как, например, при интерполировании и преобразовании рядов, решении конечных уравнений и выражении функций определенными интегралами, занимают всю 1-ю книгу, а по всей 2-й книге это же понятие применяется при решении вероятностных задач.

Отношение Буля (1860/1880, с. 15) к производящим функциям нельзя назвать сочувственным, и Тодхантер (1865, § 951) воспринял его точку зрения, но я полагаю, что они ошибались. Очень высокое мнение их предшественника Лакруа (1797 – 1798/1819, т. 3, гл. 4) о введенном понятии подтверждается сводкой (MacMahon 1915, т. 1, Введение, с. vi) о роли производящих функций в комбинаторном анализе. Но для оценки всей значимости производящих функций весьма важно рассмотреть два вопроса, которые МакМахон не затрагивал. Вот они[3].

3. Характеристические функции

Применяя преобразование $t^x = e^{iwx}$, Лаплас (с. 83 – 84) представил производящие функции в их второй форме, оставив за ними их прежнее название. Не ограничься он целочисленными значениями

x, эта форма оказалась бы тождественной той функции, которую ввел Леви (1925, с. 161):

Мы называем <u>*характеристической функцией*</u> *φ(t) вероятное значение*[4] *функции* e^{itx}, *т. е.*

$\varphi(t) = \Sigma\alpha_h \exp(itx_h)$.

В примечании Леви заметил, что

Понятие характеристической функции ввел видимо Коши во многих заметках, представленных [Парижской] *академии наук в 1853 г. Термин* <u>*характеристическая функция*</u> *ввел Пуанкаре, который назвал ей вероятное значение* e^{tx}, *а не* e^{itx}. *Легко заметить выгоду нашего видоизменения этого определения.*

Коши 1853 г. следует заменить здесь на *Лаплас, не позднее 1812 г.* Яркий пример того, что это историческое замечание было признано, а содержание АТВ – забыто, мы найдем в небольшом, но очаровательном и важном томике (Darmois 1928, с. 45): "В 1853 г. эту функцию ввел в теорию вероятностей Коши, а затем Пуанкаре, см. Леви (1925, с. 161 Прим.)". Он же, в главе *Повторные испытания и закон больших чисел*, с. 75, дал свое определение характеристической функции:

$$\lambda(t) = (q_1 + p_1e^t)\,(q_2 + p_2e^t)\,\ldots\,(q_s + p_se^t). \qquad (1)$$

Заметим, что у Леви она включала бы it, а не t, и сравним (1) со следующими строками из АТВ (кн. 2, гл. 9): *Рассмотрим произведение*

$$[1 - q + q\exp(\nu wi)]\,[1 - q_1 + q_1\exp(\nu_1 wi)]\,\ldots$$
$$[1 - q_{s-1} + q_{s-1}\exp(\nu_{s-1}wi)].$$

Придавая каждой из величин $\nu, \nu_1, \ldots \nu_{s-1}$ частное значение 1, мы получим выражение (1) и, следовательно, пуассоново обобщение теоремы Бернулли, т. е. закон больших чисел[5].

4. Парные интегральные преобразования Фурье

Рассмотрение производящих функций у Лапласа (с. 83 – 84 кн. 1-й) включает пару уравнений (в моих обозначениях)

$$U(w) = \sum_{x=0}^{\infty} y(x)e^{iwx},\ y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(w)e^{-iwx}dw,\ x = 0, 1, 2, \ldots, \infty.$$

Интересно заметить, как близко дальнейшее рассмотрение этих функций в знаменитой гл. 4-й кн. 2-й подошло к введению парных интегральных преобразований Фурье

$$U(w) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{iwx}dx,\ y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(w)e^{-iwx}dw.$$

В этой связи Тодхантер (1865, § 1001) указал:

Мы начнем наше описание гл. 4-й Лапласа с решения весьма общей задачи Пуассоном, что даст нам возможность представить изложение выкладок в ней более понятным образом. Но при этом следует помнить, что заслуга здесь почти полностью принадлежит Лапласу. Хотя его выкладки неясны и отталкивающи, в них содержится всё существенное для теории. Пуассон близко следует за своим знаменитым проводником, но облегчает дорогу и делает ее безопаснее для будущих путешественников.

Сколько раз *неясные и отталкивающие* выкладки Лапласа склоняли меня к чтению этой главы, останется тайной. Я признаю свой извращенный вкус, но не стремлюсь к дурной славе. И поэтому, следуя примеру большого историка, представлю вам выдержки из мемуара Пуассона (1824, с. 275/2007, с. 168) вместо описания того же исследования Лапласа:

Вопрос, который я хочу рассмотреть в этом мемуаре, уже изучался многими геометрами и особенно месье Лапласом, чьи исследования этой интересной темы объединены в Аналитической теории вероятностей (гл. 4 книги 2-й) и в трех Дополнениях к ней. Общность его анализа, многообразие и важность приложений, на которых он остановился, конечно же не оставляют пожелать ничего иного. Но мне кажется, что некоторые вопросы этой теории могут еще быть развиты, и я полагаю, что замечания, которые я имел случай произнести при ее изучении, подходящи, чтобы прояснить затруднения и могут быть не без пользы в практике.

И далее (с. 276/2007, с. 168):

$$p = (1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-a}^{a} fx\, e^{x\alpha i}dx\Big)^{s} e^{-b\alpha i}\,\sin c\alpha\, d\alpha/\alpha. \qquad (2)$$

С. 168/276): *Пусть в уравнении (2) $s = 1$, тогда вероятность, что ошибка одного-единственного наблюдения заключена в границах $b - c$ и $b + c$ будет равна* … [правой части (2), в которой принято $s = 1$].

И в этом случае “одного наблюдения”, изменив порядок интегрирования, Пуассон (там же/2007, с. 169) получает

$$p = \int_{b-c}^{b+c} fxdx. \qquad (3)$$

До Фурье остался небольшой шаг. Из сказанного Пуассоном следует, что (2) = (3). Поэтому, при $c = db/2$ [в интеграле (3)] и учитывая, что при $c \to 0$ $\sin c\alpha \to c\alpha$, мы сразу же получаем

$$f(b) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-a}^{a} fx\, e^{x\alpha i}dx\right)e^{-b\alpha i}d\alpha.$$

Или же, приняв пределы внутреннего интеграла бесконечными, мы приходим к хорошо известной формуле Фурье.

Интересно заметить, что исследования Лапласа и Пуассона содержат выражения, в точности равносильные *разрывному множителю* Дирихле (1839)

$$\mathrm{sign}(\nu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin \nu t\frac{dt}{t}. \qquad (4)$$

Они таким образом предвосхитили его применение по меньшей мере на 27 и 12 лет соответственно. Значение функции (4) в теории вероятностей недавно подчеркнул Dodd (1925).

5. Оценка интегралов

В теории вероятностей и ее приложениях часто встречаются интегралы от функций, сложные сомножители которых возводятся в высокие степени[6]. Это в первую очередь происходит при решении задач о причинах. О существовании соответствующих априорных вероятностей часто известно весьма мало, и для надежных заключений поэтому требуется большое число наблюдений.

Метод аппроксимации, особо подходящий к такого рода интегралам, Лаплас предложил в гл. 1-й второй части кн. 1-й, которая озаглавлена *Приближенное интегрирование дифференциалов, содержащих сомножители, возведенные в высокие степени*. Каждый, знакомый с этим методом, не преминет согласиться с мнением Тодхантера (1865, § 905, с. 484):

Описанный здесь метод аппроксимации значений определенных интегралов должен считаться крупным вкладом в математику вообще, и в нашу специальную область [этой науки] *в особенности*.

Здесь уместно упомянуть обстоятельство, которое мы ниже подчеркнем в связи с вероятностью причин. Именно, тот, кто хочет понять, как развивались взгляды Лапласа на вероятность, должен, конечно же, прочесть его мемуар 1774 г. Но тот, кто желает ознакомиться с его зрелым и окончательным трудом, должен прочесть его позднейшие мемуары и АТВ. Мы поясним это комментариями Тодхантера. Имея в виду мемуар 1774 г., а затем АТВ, он (1865, §§ 871 и 894, с. 467 и 478) говорит: “Используя грубый метод аппроксимации“ и “Это доказательство намного превосходит предыдущее”.

Помимо упомянутой выше главы из кн. 1-й АТВ, ее вторая часть содержит еще две главы: *Приближенное интегрирование уравнений с частными разностями и бесконечно малыми* и *Приложение предшествующих методов к аппроксимации различных функций очень больших чисел*. И среди этих *различных функций* мы находим точное выражение неполного суммирования членов бинома посредством неполной B-функции. Именно это Пирсон (1924, с.

202 – 203) опубликовал в качестве оригинального исследования и даже позже он (1928, с. 170) косвенно заявил, что Лаплас привел лишь приближенный результат[7].

В связи с методом оценивания интегралов мы рассмотрим для определенности одновершинную плотность вероятности $y = f(x)$ с модой $x = a$. Допустим, что требуется вычислить интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} y dx .$$

Для этой цели Лаплас дал нам две формулы. Первая была основана на преобразовании

$$y(x) = y(\gamma)e^{-t}, \gamma = \alpha \text{ или } \beta,$$

и предполагала, что мода не попадает внутрь пределов интегрирования. В противном же случае, или если мода располагалась вблизи одного из пределов, следовало применять вторую формулу, основанную на замене переменной

$$y(x) = y(a)\exp(-t^{\mu+1}).$$

Лаплас указал, что вывел эту формулу, чтобы применить ее к случаю, когда y удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x-a)^{\mu} f(x).$$

И, приведя общую формулу, пригодную для любого значения μ, он сказал: “Случай $\mu + 1 = 2$ является самым обычным, и мы приведем формулы, соответствующие ему”. Тот, кто изучает Лапласа, конечно же, вполне готов учесть систему кривых Пирсона, которая исходит из дифференциального уравнения

$$-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x-a)f(x), f(x) = \frac{1}{A+Bx+Cx^2} .$$

Никакая сводка метода Лапласа оценки интегралов не воздаст ему должное, и хорошо вознаградит себя тот, кто прочтет всю соответствующую главу АТВ.

Предваряя свои замечания о вероятности причин, я полагаю целесообразным обратить здесь внимание на существенное обстоятельство, которое имеет косвенное отношение к формулам части 2-й кн. 1-й. Его же ранее явно рассмотрел Лаплас (1781). Он полагает, что в формулах аппроксимации

$$y = \varphi u_s u_1^{s_1} u_2^{s_2} \ldots$$

и (кн. 1-я, § 22) вводит уравнение

$$-v = y\frac{dx}{dy} = [1 \div \left(\frac{sdu}{udx} + \frac{s_1 du_1}{u_1 dx} + \frac{s_2 du_2}{u_2 dx} + \ldots + \frac{d\varphi}{\varphi dx}\right)].$$

Далее он говорит:

Итак, в случае, при котором s, s_1, s_2, … *являются очень большими числами,v очень мало, и если положить* $1/s = \alpha$, *то* α *будет очень малой дробью, функция v будет иметь порядок* б, *и последующие члены формулы (А) окажутся порядка* $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$[8]

Но каково значение множителя φ? При сравнении мемуара Лапласа (1781/1893, с. 470) с Пуанкаре (1896/1912, с. 255) и Эджуортом (Bowley 1928, с. 11 – 12) становится ясно, что величина ц, если она включена в задачи о вероятности причин, должна означать функцию априорной вероятности. При обсуждении этого вопроса Лаплас, как и Пуанкаре и Эджуорт, указал, что этот априорный множитель малозначащ, если *производящая* вероятность происшедшего события включает сомножители, возведенные в высокие степени.

Здесь мы ясно видим, что после мемуара 1774 г. можно дополнительно найти разве лишь немногое существенно значимое.

6. Вероятность причин

Эта тема требует серьезного рассмотрения. Можно легко затеряться в переплетении противоречий и приводящих в заблуждение истолкований, которые имеют место, несмотря на ее ясное представление. Но вот, например, главы о теореме Бейеса в некоторых прежних работах и в недавних книгах Burnside (1928?) и Coolidge (1925?) вполне удовлетворительны. Более того, всем студентам, а не только посвятившим себя инженерным специальностям, следует прочесть соответствующе описание в книге Fry (1928).

Полезно иметь в виду, что формулу из этого мемуара

$$P_i = w_i p_i / \Sigma w_i p_i$$

вероятности *i*-й причины при неравных априорных вероятностях w_i мы будем называть *лапласовым обобщением формулы* (или теоремы) *Бейеса. Формулой* (или теоремой) *Бейеса* мы будем называть тот частный случай, при котором предполагается, что все априорные вероятности равны друг другу[9]. Эти формулы применимы только к дискретным значениям *w* и *p*, но мы не будем придерживаться этого ограничения; и Бейес (1764), и Лаплас спокойно так и делали.

Исследуем теперь те места из АТВ, которые относятся к вероятностям причин. В Приложении 1 к нашей статье мы привели соответствующие сводки, которые содержат

1) Формулу (или теорему) Бейеса и для дискретных, и для непрерывных переменных.

2) Ее обобщение, данное Лапласом, снова в обоих случаях. Оно имеет отношение к априорным вероятностям.

3) Доказательство формулы для апостериорной вероятности, основанное на свойствах формулы вероятности сложного события; другими словами, доказательство, включающее основное звено первоначального доказательства, данного Бейесом.

4) Четкое утверждение о том, что в приложениях Лаплас применял частный случай формулы Бейеса, потому что произведение двух заданных функций можно всегда представить единой функцией, так что к этому случаю сводится общая формула.

5) Обоснованные указания на то, что Лаплас избегал малых выборок.

Тот, кто переварил тему о вероятности причин в АТВ, сможет уверенно проложить путь сквозь упомянутые в начале этого пункта противоречия и непонимание. Кто предупрежден, тот вооружен. Сравним, например, сводки из АТВ в Приложении 1 со сводками из книги Кейнса (1921) в Приложении 2. Вот хороший пример того, как судят о сочинении Лапласа по его первому мемуару 1774 г. вместо АТВ. Аналогично этому Кейнс истолковал взгляды Де Моргана на обращенную вероятность только лишь по выдержке из введения в сочинение последнего (1838). Он не принял во внимание общего правила на с. 59 в главе *Об обращенной вероятности* того же *Essay* Де Моргана (подчеркнуто нами):

Вот правило, к которому нас подводит предыдущее рассуждение: <u>если существование различных обстоятельств, при которых могло произойти событие, не было равновероятным</u>, то, <u>прежде, чем прибегнуть к правилу на с. 55</u>, после определения вероятностей, придаваемых наблюденному событию каждым из них, <u>следует их умножить на вероятность самого обстоятельства</u>[10].

Сочинения Пирсона тоже никак не помогают достичь ясного понимания вклада Лапласа в теорию вероятностей. Так, в качестве принципа Лапласа он (1892/1911, с. 145) формулирует следующее утверждение:

Если результат может произойти ввиду любого из некоторого числа до-опытно равновероятных и различных условий, то после опыта, который и является истинным условием [мерилом], *вероятность каждого пропорциональна вероятности, что результат вызван им.*

Но это не обобщение, данное Лапласом, а его ограниченная теорема 1774 г. Обратим теперь внимание на другое утверждение Пирсона (1907, с. 366):

Пусть шанс наступления данного события находится между x *и* $x + \delta x$, *и в* $n = p + q$ *испытаниях оно появилось* p *раз и не наступило* q *раз, тогда при равном распределении нашего незнания*[11] *вероятность того, что его истинный шанс находится между* x *и* $x + \delta x$, *равен*

$$P_x = \frac{x^p (1-x)^q \, dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx}. \qquad \text{(i)}$$

Это – теорема Бейеса.

Пусть теперь произведена вторая серия из m = r + s испытаний. Тогда вероятность, что это событие произойдет r раз и не наступит s раз, при его априорном шансе находиться между x и x + δx окажется равной

$$P_x = \frac{m!}{r!s!} x^r (1-x)^s.$$

Соответственно, при любом x полный шанс событию произойти r раз во второй серии испытаний равен

$$\frac{m!}{r!s!} \frac{\int_0^1 x^{p+r} (1-x)^{q+s} \, dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx}. \qquad \text{(ii)}$$

Таково с небольшими поправками лапласово обобщение теоремы Бейеса.

Последнее предложение вдвойне обманчиво. Во-первых, оно производит неверное впечатление, будто уравнение (ii) следует приписать Пирсону (McEwen 1929, с. 20). Однако в точности то же уравнение содержится не только в § 30 кн. 2-й АТВ, но и в мемуаре 1781 г., а формула без сомножителя – в мемуаре 1774 г. Но на каком основании можно считать эту последнюю неверной? В своем замечании Тодхантер (1865, с. 467) указал: “Так что, конечно, предполагается, что *m* белых билетиков и *n* черных извлекаются в установленном порядке”.

Во-вторых, выражение “лапласово обобщение теоремы Бейеса” очень может привести к тому, что уравнение (ii) будет считаться этим обобщением, что полностью воспрепятствует прогрессу.

Задача Пирсона 1907 г. оказалась темой его позднейшей статьи (1920), в которой вклад Лапласа и его понимание темы описаны еще хуже. Вот его высказывание (с. 2):

Вряд ли кто-нибудь из ранних авторов, описывавших эту тему, притом что все они рассматривали ее с точки зрения математической теории азартных игр, имели хоть малейшее представление о громадном обобщении их идей, которое произойдет в недавнее время ввиду применения теории случайных выборок в каждой сфере нашего знания, – в экономике, социальных науках, медицине и антропологии [антропометрии] *– и в каждой области наблюдений, – астрономической, физической и психической* [психологической].

Ясно, что Пирсон не видел хвалебного слова Фурье [III], или, к примеру, следующего пункта из оглавления АТВ (гл. 5-й кн. 2-й):

Приложение к суточным колебаниям барометра и к вращению Земли, выведенному из наблюдений за падением тел. Тот же анализ применим к наиболее тонким проблемам астрономии, политэкономии, медицины и т. д.

По поводу психологии Bayle (Лаплас 1814/1920, с. XIII) сказал о Лапласе: "Самой примечательной является глава, в которой он намечает эскиз науки психологии"[12].

Указанная статья Пирсона, к сожалению, начинается вполне ошибочным математическим анализом роли априорных вероятностей существования [причин]. Начни он с лапласова обобщения теоремы Бейеса, Burnside (1924) не имел бы повода сказать, что

Нет никакого основания предполагать, что любые следствия из рассуждений на с. 5 останутся верными по отношению к статистической задаче, упомянутой в начале статьи Проф. Пирсоном.

Имя Лапласа упоминается в бесчисленных обсуждениях о равномерном распределении незнания в вероятностях причин [см. Прим. 11]. Если я не ошибаюсь, Лаплас и не защищал подобного распределения. Но так поступил Бейес, и его довод заслуживает серьезного рассмотрения. Пересылая мемуар [покойного] Бейеса в Королевское общество, Прайс указал, что тот вначале постулировал равную вероятность существования причин, чтобы установить свою ограниченную теорему на прочном основании, а затем сформулировал довод в пояснительном комментарии, чтобы обосновать ныне обычный образ действий для случая, при котором нет никаких априорных сведений.

Пусть p будет (неизвестной) вероятностью наступления события в одном испытании. В следствии, которое предваряло его теорему, Бейес показал, что если все значения p в интервале между 0 и 1 априорно равновероятны, то вероятность событию произойти x раз в n испытаниях не зависит от x.

Аналогично, рассмотрим ящик, содержащий N шариков, белых и черных, соотношение между количествами которых может с равной вероятностью принимать любое значение между $0/N$ и N/N. При выборе n шариков из ящика вероятность содержания в нем любого числа белых не будет зависеть от n.

И теперь, говорит Бейес в своем пояснительном комментарии, может ли что-нибудь лучше описать полное незнание значения p, чем то, что априорно состав выборки с равной вероятностью может быть каким угодно? При подобном описании полного незнания следствие Бейеса обосновывает априорное предположение о равной вероятности всех значений p.

Обсуждая теорему Бейеса и противопоставляя ее идее *наибольшего правдоподобия*, Фишер (1922, с. 325), видимо, не заметил значимость пояснительного комментария Бейеса. Он считает, что вместо вероятности p появления события в единичном испытании можно было в равной мере применить какое-либо иное переменное, например такое μ, что $\sin\mu = 2p - 1$ и полагать, что априорно все значения μ равновероятны.

Но это предположение о всех значениях μ (в пределах, которые определяются значениями $p = 0$ и $p = 1$) не приведет к тому, что вероятность событию произойти x раз в n испытаниях окажется независимой от x. Указанный отрицательный результат ослабляет довод Фишера против правила Бейеса.

Описание исследований Бейеса и Лапласа о вероятности причин у Тодхантера, к сожалению, в высшей степени несовершенно. Он приводит следствие Бейеса, не упоминая то особое обстоятельство, которое тот имел в виду, а именно, что вероятность событию наступить x раз в n испытаниях не зависит от x. Это упущение лишает смысла пояснительный комментарий Бейеса, сам же комментарий у Тодхантера отсутствует. И опять же, хоть результаты Лапласа заслуживают высокой похвалы, Тодхантер выдал ее не по адресу. Вот что он (с. 466) сказал о мемуаре 1774 г.:

Этот мемуар примечателен в истории нашей науки, потому что в нем впервые был четко сформулирован принцип оценки вероятностей причин, которые могли произвести наблюдаемое событие. У Бейеса должно было быть понятие об этом принципе …

Но в этом мемуаре нет лапласова обобщения правила Бейеса, а кроме того, описывая мемуар Лапласа (1781) и АТВ, Тодхантер не упоминает того обобщения, которое там имеется. И в этой связи прискорбно, что некоторые авторитетные специалисты, обсуждая вероятность причин, основывались, видимо, на Тодхантере как на замене Лапласа.

Здесь, видимо, уместно отметить, что пользующийся дурной славой пример Солнца, взошедшего миллион раз подряд[13], появился в [примечаниях] Прайса к мемуару Бейеса и что его перепечатку Лаплас тут же сопроводил утверждением:

Но число это [соотношение шансов в пользу последующего восхода] *несравненно значительнее для того, кто, зная из совокупности явлений принцип, регулирующий дни и времена года, видит, что ничто в настоящий момент не может остановить их течения*[14].

Буль (1854, с. 248) говорит: "Мы приведем сводку, в основном по Лапласу, о принципах, которые применялись для решения задачи о вероятностях". Его сводка описывает ограниченное правило 1774 г., но в ней нет лапласова обобщения, и это следует иметь в виду при цитировании Буля по указанной теме.

Особо интересно заметить, что Пуанкаре, как великий мастер, которым он и был, часто пренебрегал априорно существующими функциями, четко имея в виду большое число наблюдений.

7. Многочлены Эрмита

В § 17 гл. 3-й кн. 2-й Лаплас вводит дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial U}{\partial r'} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2}$$

как примерно равносильное конечному уравнению и обеспечивающее решение следующей задачи:

Рассмотрим две урны, A и B, в каждой из которых находится n шаров, и предположим, что из общего числа 2n шаров белых столько же, сколько черных. Из каждой урны одновременно выбирается по одному шару, которые циклически перекладываются в другую, после чего шары в урнах каждый раз хорошенько перемешиваются. Пусть это произойдет r [= nr'] *раз. Требуется определить вероятность, что в урне A окажется x белых шаров.*

Лаплас (1811/1898, с. 361) считал эту задачу “примечательной в том отношении, что ее решение является первым примером применения исчисления бесконечно малых частных разностей в задачах о вероятностях”. Недавно Лотка (1925, с. 31) применил эту задачу для пояснения “статистического значения необратимости”.

Комментируя указанное дифференциальное уравнение, Тодхантер (1865, с. 559) указал:

Лаплас интегрирует это приближенное уравнение при помощи определенных интегралов … и переходит к другим теоремам, аналогичным тем, которые возникают в связи с функциями Лапласа, как их теперь называют.

“Другие теоремы”, как Тодхантер назвал их через год после выхода статьи Эрмита (1864), на полстолетия опередили многочлены (Успенский 1927, с. 593 Прим.), ныне занимающие главное место в литературе по теории вероятностей и статистической теории.

Лаплас выразил решение этого дифференциального уравнения в функции величин U_i и U_i', которые связаны с многочленами Эрмита:

$$(-1)^n (2n)!\,U_n(\mu) = n!\,H_{2n}(\mu) = n!\,2^n A_{2n}(\mu\sqrt{2}),$$

$$2(-1)^n (2n+1)!\,U_n'(\mu) = n!\,H_{2n+1}(\mu) = n!\,2^{(n+1)/2} A_{2n+1}(\mu\sqrt{2}).$$

Здесь H и A – многочлены Эрмита в форме Эрмита (1864/1908, с. 295) и Аппеля[15] соответственно. Эрмит применял обозначение U, и для избежания путаницы Аппель заменил его на H. Но Аппель сделал больше: заменой переменной он видоизменил первоначальные выражения Эрмита, что видно в обеих правых частях каждого приведенного выше уравнения.

Лаплас определил свои функции через определенные интегралы и также рядами, аналогичными тому второму ряду, в котором Эрмит выразил свои многочлены. Ортогональные свойства величин U_i и U_i' доказаны. Лаплас применил эти свойства для установления коэффициентов Q_1, Q_2, … и L_0, L_1, … в разложении

$$X = \frac{2\exp(-\mu^2)}{\sqrt{\pi n}}\{1 + Q_1(1 - 2\mu^2) + \ldots + L_0\mu + L_1\mu[1 - (3/2)\mu^2] + \ldots\},$$

в котором “X есть заданная функция от μ”. Оно, конечно же, полностью предвосхищает так называемый ряд Грама – Шарлье типа A[16].

8. Пределы в теории вероятностей

Параграф 17 вовсе не единственная существенная часть гл. 3-й кн. 2-й. Я особенно обращаю внимание на ее начальный абзац:

По мере возрастания числа событий их соответствующие вероятности всё более и более устанавливаются; их средние результаты и зависящие от них выгоды или потери стремятся к пределам со всё возрастающими вероятностями[17].

Заметим, что *всё* относится к *вероятностям*. Чтобы по этому поводу не возникало никаких недоразумений, обратимся к другому сочинению Лапласа (1786/1894, с. 308):

Таким образом видно, как при умножении событий мы устанавливаем их соответствующие возможности. Но следует заметить, что это исследование включает два приближения. Одно из них относится к пределам, в которых содержится значение x и которые всё более и более сжимаются, а второе – к вероятности, что x находится внутри этих пределов. Эта вероятность непрестанно стремится к единице или достоверности, и в этом указанные приближения отличаются от обычных, при которых мы непременно остаемся уверенными в том, что результат содержится в назначенных пределах.

Вполне очевидно, что Лаплас имел в виду основополагающее различие между идеей предела, применяемого в чистой математике, и понятием о пределе, на котором зиждутся частотные определения вероятности. Это различие ясно указал Фрай (1928, с. 88 – 91) и его же обсуждали Castelnuovo (1932?) и Du Pasquier (1932?).

Частотные определения вероятности напоминают нам о Венне, и я кратко отвлекусь, ссылаясь на него (1866/1888, с. viii):

Вероятность в очень большой степени отдали на откуп математикам, которые, как таковые, в общем-то не желали обращаться с ней как следовало бы … Любая тема, которую обсуждали такие личности, как Лаплас и Пуассон, и на которой *они исчерпали всю мощь своего анализа, не могла не быть рассмотрена глубоко, поскольку она входила в область их интересов. Но истинные принципы этой науки обычно либо исключались из этой области, либо обсуждались так ограниченно, что лучше бы вовсе не затрагивались*.

По моему мнению, вклад Лапласа в теорию вероятностей подразумевает философские взгляды высшего порядка. Более того, будь параграфы *Опыта философии* (1814), мемуаров и АТВ, в которых обсуждались фундаментальные идеи, собраны в едином томе, он превзошел бы по размеру книгу Венна. Как этих двух ученых можно сравнивать в других отношениях, зависит от личной точки зрения.

9. Сводка

Отвечая на свой вопрос, *В какой степени тот, кто хорошо ознакомится с АТВ, окажется в контакте с нынешним состоянием теории вероятностей*?, я рассмотрел

1) Фактическое совпадение производящей функции Лапласа и характеристической функции Коши – Пуанкаре. Полю Леви мы обязаны введением их в недавнюю литературу по теории вероятностей.

2) Близкое приближение анализа Лапласа к форме парных интегральных преобразований Фурье.

3) Явное представление Лапласом (с точностью до постоянной) многочленов Эрмита и родственного разложения Грамма – Шарлье.

По поводу второй части своего ключевого вопроса, *Насколько прочно то основание, которое там обнаружится, для ее приложения в статистике*?, я представил

1) Вклад Лапласа в теорию обращенной вероятности

и указал на

2) Различие, которое он установил между понятием *предела* при его применении вне области теории вероятностей и его значением для наблюденной частости, с которой происходит некоторое событие.

Как свидетельство того, что АТВ превосходит многое в современной литературе по теории вероятностей, и ввиду его громадного практического значения, я обрисовал метод Лапласа обращения с подынтегральными функциями, включающими множители, возведенные в высокие степени. Естественно, что я не смог выполнить цель нынешнего доклада без некоторого проявления своего громадного восхищения Лапласом. Но я вовсе не извиняюсь за восхищение автором того, что [Дж.] Гершель назвал "непревзойденным математическим мастерством и мощью".

Примечания

1. Автор безусловно имеет в виду Тодхантера, на которого неоднократно ссылается, притом критично в п. 2 и в конце п. 6. О. Ш.

2. Бейес не упомянут, и это естественно: в Европе о нем узнали в 1781 г. Упомянул его анонимный автор, описавший один из мемуаров Лапласа в издании Парижской академии наук. Чуть ниже автор цитирует Фурье по поводу единого аналитического метода Лапласа; см. [, Прим.]. О. Ш.

3. Где же эти два? О. Ш.

4. В соответствии с давней (и ошибочной) традицией, которой придерживались, например, Бертран и Пуанкаре, средние значения назывались вероятными. Тот же неудачный термин ниже. О. Ш.

5. В упомянутой главе Лаплас рассматривал переменные вероятности p_i и q_i события, с которыми были связаны соответствующие выгоды и потери. О. Ш.

6. Автор имеет в виду подынтегральные функции типа $x^p(1-x)^q$, в которых показатели степени – большие числа, а x, например, – неизвестная вероятность новорожденному оказаться мальчиком, см. гл. 6-ю кн. 2-й АТВ. О. Ш.

7. Э. Пирсон, в своем редакционном примечании (К. Пирсон 1978, с. 703) указал, что его отец "вероятно" впервые ознакомился с самой АТВ "в конце 1920-х годов". К. П. (с. 728 – 729) описывает исследование вероятностей причин по Бейесу и Лапласу, но совсем не так, как автор. О. Ш.

8. Формулу (А) автор так и не пояснил, и подобная небрежность для него характерна. Лаплас привел эту формулу на той же странице той же главы; она выражала интеграл от ydx. О. Ш.

9. В начале этого пункта автор одобрительно отозвался об описании соответствующего результата Кулиджем (1925?). На с. 88 немецкого перевода этой книги утверждается, однако, что Бейес привел общую, а не частную формулу. О. Ш.

10. Де Морган – сомнительный авторитет, см. [XIV].

11. Пирсон имел в виду принцип недостаточного основания (равного распределения знания), который Кейнс (1921/1973, с. 44) назвал принципом безразличия. Первое название иногда переиначивалось именно так, как это сделал Пирсон. Там же (с. 53 прим.) Кейнс указал, что выражение *равное распределение незнания* придумал Буль (1854, с. 369 – 370). О. Ш.

12. Название главы: *Об иллюзиях в оценке вероятностей*. О. Ш.

13. Примечательно, что Чебышев (1879 – 1880, с. 158) сформулировал ту же задачу на обыденном уровне: студент удовлетворительно ответил на несколько вопросов; какова вероятность, что он так же ответит на следующий? О. Ш.

14. Автор не привел никакой ссылки. Фразу Лапласа мы отыскали в его *Опыте философии* (1814/1999, с. 837 левый столбец). Впрочем, она не очень важна, поскольку ее утверждение очевидно. О. Ш.

15. Вот непонятная ссылка автора: Appell, Fonctions Hypergéometriques et Hypersphérique, Polynomes d'Hermite, 1926, p. 333. Установленные нами книги см. в Библиографии. О. Ш.

16. Автор не обратил должного внимания ни на указанное уравнение, ни на исходную задачу. Мы (1976, с. 149 – 150) указали на ее обобщения Марковым (1915), который (с. 568), кстати, употребил термин "полиномы Лапласа – Чебышева – Эрмита" и Стекловым в том же году, а также на позднейшую статью самого автора, который заметил, что Хостинский связал уравнение Лапласа с броуновским движением.

Тодхантер (1865, § 999) заявил, что при переходе от уравнения в частных конечных разностях к дифференциальному Лаплас "беспощадно изуродовал его". Автор об этом умолчал, а Хальд (1998, с. 339), хоть и не опровергнул обвинения, смог проделать это преобразование иным способом.

Задача по перекладке шаров впервые встретилась у Даниила Бернулли и, что важнее, она равносильна модели Эренфестов, с которой принято начинать историю случайных процессов, ср. упомянутую выше связь уравнения Лапласа с броуновским движением. Предельное содержание урн, известное и Даниилу Бернулли, и Лапласу, легко определяется по эргодическому свойству цепей Маркова См. также Шейнин (1972, п. 6.2). О. Ш.

17. Лаплас неудачно сформулировал свое утверждение, а автор не пояснил его. См. наши примечания 6 и 5. О. Ш.

Библиография

Гнеденко Б. В., Шейнин О. Б. (1978), Теория вероятностей. Глава в книге *Математика XIX века*. Ред., А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М., с. 184 – 240.

Марков А. А. (1915), Об одной задаче Лапласа. В книге автора *Избранные труды*. Б. м., 1951, с. 549 – 571.

Чебышев П. Л. (1879 – 1880, лекции), *Теория вероятностей*. М. – Л., 1936.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1972), Daniel Bernoulli's work on probability. В книге Kendall M. G., Plackett R. L., ред., *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, 1977, pp. 105 – 132. Перевод в книге автора *Статьи по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин, 2007, с. 118 – 136. Также www.sheynin.de

--- (1976), Laplace's work on probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 16, pp. 137 – 187.

--- , составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de

---, составитель и переводчик (2007), *Вторая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de

Appell P. (1925), *Sur les fonctions hypergéometriques de plusieurs variables, les polynomes d'Hermite et autres fonctions etc.* Paris.

--- (1926), *Fonctions hypergéometriques et hypersphériques.* Paris.

Bayes T. (1764), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Biometrika*, vol. 45, 1958 pp. 293 – 315. Перепечатка: Pearson E. S., Kendall M. G., ред., *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, 1970, pp. 134 – 154. Перевод: Очерк решения задачи из учения о шансе. В книге Шейнин (2006, с. 131 – 165).

Boole G. (1854), *Laws of Thought*. Amherst, N. Y., 2003.

--- (1860), *Treatise on the Calculation of Finite Differences*. London, 1880.

Bowley A. L. (1928), *Edgeworth's Contributions to Mathematical Statistics*. London. [London, 1972.]

Burnside W. (1924), On Bayes' formula. *Biometrika*, vol. 16, p. 189.

--- (1928), *Theory of Probability*. Oxford.
Castelnuovo G. (1932), Sur quelques problémes se rattachant au calcul des probabilités. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 3, pp. 465 – 490.
Coolidge J. L. (1925), *Introduction to Mathematical Probability*. Oxford. Нем. перевод: Leipzig, 1927.
De Morgan A. (1838), *Essay on Probabilities and on Their Applications*. London, Cabinet Cyclopedia.
Dirichlet P. G. L. (1839), Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples. *Werke*, Bd. 1. Berlin, 1889, pp. 377 – 380; 383 – 390. Франц. и нем.
Dodd E. L. (1925), The frequency law of a function of variables with given frequency laws. *Annals Math.*, vol. 31, pp. 27 – 31.
Du Pasquier L.-G. (1932), Sur les nouveaux fondements philosophiques et mathématiques du calcul des probabilités. *Atti Congresso Intern. dei Mathematici Bologna 1928*, t. 6, pp. 5 – 20.
Fisher R. A. (1922), On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A222, pp. 309 – 368.
Fry T. C., Фрай Т. (1928), *Probability and Its Engineering Uses.* London. [Princeton, 1965.] *Теория вероятностей для инженеров*. М. – Л., 1934.
Hald A. (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.
Hermite C. (1864), Sur un nouveau développement en série des fonctions. *Oeuvr.*, t. 2. Paris, 1926, pp. 293 – 308.
Keynes J. M. (1921), *Treatise on Probability. Coll. Writings*, vol. 8. London, 1973.
Lacroix S.-F. (1797 – 1798), *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, t. 3. Paris, 1819. [Paris, 1874.]
Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.
--- (1781), Sur les probabilités. *Oeuvr. Compl.*, t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485.
--- (1814), *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris, 1920. Introduction: X. Torau Bayle. Перевод: Очерк философии теории вероятностей. В книге Прохоров Ю. В., ред. *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия.* М., с. 834 – 863.
--- (1811), Sur les intégrales définies. *Oeuvr. Compl.*, t. 12. Paris, 1898, pp. 357 – 412.
--- (1812), *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvr. Compl.*, t. 7. Paris, 1886.
Lévy P. (1925), *Calcul des probabilités*. Paris.
Lotka A. J. (1925), *Elements of Physical Biology*. Baltimore.
McEwen G. F. (1929), Methods of estimating the significance of difficulties in or probabilities of fluctuations due to random sampling. *Bull. Scripps Instn of Oceanology*, Techn. Ser., vol. 2, No. 1, pp. 1 – 137.
MacMahon P. A. (1915), *Combinatory Analysis*, vol. 1. Cambridge.
Mises R. von (1919), Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeits-rechnung. *Math. Z.*, Bd. 4, pp. 1 – 97. Частичная перепечатка (включающая интересующее нас место): *Selected Papers*, vol. 2. Providence, Rhode Island, 1964, pp. 35 – 56.

Pearson K. (1892), *Grammar of Science*. 3rd edition, London, 1911. [Bristol 1991.]
--- (1907), On the influence of past experience on future experiments. *London, Edinb. And Dublin Phil. Mag.*, vol. 13, pp. 365 – 378.
--- (1920), The fundamental problem of practical statistics. *Biometrika*, vol. 13, pp. 1 – 16, 300 – 301.
--- (1924), Note on the relationship of the incomplete B-function to the sum of the first p terms of the binomial etc. *Biometrika*, vol. 16, pp. 202 – 203.
--- (1928), On a method of ascertaining limits to the actual number of marked terms in a population of a given size from a sample. *Biometrika*, vol. 20A, pp. 149 – 174.
--- (лекции 1921 – 1933, 1978), *The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries*. Ред., E. S. Pearson. London.
Poincaré H. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912. [Sceaux 1987.] Перевод: *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.
Poisson S.-D. (1824), Sur la probabilité des résultats moyenes des observations [pt. 1]. *Conn. des temps* pour 1827, pp. 273 – 302. Перевод в книге Шейнин (2007, с. 166 – 193).
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability.* New York, 1949, 1965.
Uspensky J. V. (1927), On the development of arbitrary functions in series of Hermite’s and Laguerre’s polynomials. *Annals Math.*, vol 28.
Venn J. (1866), *Logic of Chance*. Перепечатка издания 1888 г.: Нью-Йорк, 1962.

III

Ж. Б. Ж. Фурье

Похвальное слово о маркизе Лапласе

J. B. J. Fourier, Éloge historique de M. Le Marquise de Laplace.
Mém. Acad. Roy. Sci. Inst. de France, t. 10, 1831, pp. LXXX – CII;
Historical Eloge of the Marquis De Laplace
London, Edinb. and Glasgow Phil. Mag.,
2nd ser., vol. 6, 1829, pp. 370 – 381

От переводчика

Творчеству Лапласа посвящена огромная литература, но приводимый ниже перевод *Похвального слова* Фурье интересен и как обзор, и как одно из двух первых свидетельств современников; вторым была речь Пуассона (1827). В качестве дополнения мы можем в первую очередь назвать статьи Молина [II] и Morando (1995). Фурье стал членом Парижской академии наук в 1817 г. и ее непременным секретарем в 1822 г. Свой доклад он прочел 15 июня 1827 г.

Английский перевод *Похвального слова* вышел в свет до появления оригинала и отличается от него крайне незначительно.

[1] Имя Лапласа было на слуху во всех частях света, где только почитались науки, но его память не может быть более достойно уважена, чем единодушной данью восхищения и печали этого знаменитого ученого общества, разделявшего его труды и славу. Он посвятил свою жизнь изучению самых величественных целей, которые только могут занимать человеческий разум. Диковины неба, возвышенные проблемы физики, остроумные и глубокие комбинации математического анализа, все законы вселенной, занимали его мысль более 60 лет, и его усилия увенчались бессмертными открытиями.

Со времени его первых исследований было замечено, что он обладал удивительной памятью, и все умственные занятия легко давались ему. Он быстро приобрел весьма обширное знание древних языков и знакомился с различными жанрами литературы. Развивающегося гения интересует всё, и он всё может установить. Самого раннего успеха он достиг в изучении богословия, и он талантливо и с необычной проницательностью рассматривал самые трудные и противоречивые проблемы[1].

Мы не знаем, по какому счастливому случаю Лаплас перешел от изучения схоластики к высшей математике. Эта наука требует полного внимания к себе, и она привлекла его мысли. С тех пор он безоговорочно посвятил себя побуждениям своего гения и вскоре убедился в необходимости проживать в столице.

Даламбер был в то время в зените своей славы. Это он сообщил Туринскому двору [в столице Сардинского Королевства], что в Королевской академии есть математик первого ранга, – Лагранж; без его благородного свидетельства тот мог бы долгое время оставаться в безвестности. И он же заявил Королю Пруссии, что в Европе есть только один человек, который мог бы заменить в Берлине знаменитого Эйлера, согласившегося вернуться в Петербург в ответ на вторичное приглашение правительства России[2]. В неопубликованных письмах, находящихся во владении Института Франции[3], я нахожу подробности этих славных переговоров, которые закрепили переезд Лагранжа на жительство в Берлин.

[2] Примерно в то же время началась длительная карьера Лапласа, которой суждено было стать столь знаменитой. Он являлся к Даламберу, вооруженный многочисленными рекомендациями, которые могли бы считаться весьма убедительными, но его попытки оказались тщетными, потому что его даже не представили тому. Затем он послал Даламберу, чьего одобрения он добивался, весьма примечательное письмо об общих принципах механики, из которого часто цитировал мне различные отрывки.

Такому крупному математику как Даламберу, было немыслимо не заметить особой глубины этого сочинения. В тот же день он пригласил автора письма и сказал ему (это его собственные слова): “Вы видите, месье, что я очень мало ценю рекомендации, но Вам они не нужны; [своим письмом] Вы сами представили себя лучше. Мне достаточно этого, и Вы заслужили право на мою поддержку”.

Через несколько дней Даламберу удалось добиться для Лапласа профессуры по математике в Парижском военном училище[4]. С того момента, полностью преданный выбранной им науке, он сосредоточил все свои усилия в определенном направлении, от которого никогда не уклонялся. Действительно, неизменность цели его разума всегда являлась основной чертой его гения. Он уже посягал на существовавшие границы математического анализа, был опытен в его самых изощренных и мощных отделах, и не было никого, более способного расширить его область.

Лаплас решил важнейший вопрос теоретической астрономии, и у него созрел план посвятить свои усилия этой возвышенной науке[5]. Ему было суждено усовершенствовать ее, и ему удалось охватить ее во всем ее протяжении. Об этой славной цели он глубоко раздумывал и потратил всю жизнь на ее достижение с такой настойчивостью, которая быть может ни разу не встретилась в истории наук. Необъятность темы была приятна обоснованной гордости его гения; он взялся составить *Альмагест* своего времени. И этот бессмертный памятник, оставленный нам под названием *Небесная механика*, настолько же превосходит труд Птолемея, насколько современный анализ выше *Элементов* Евклида[6].

[3] Время, этот единственный справедливый раздатчик литературной славы, отправляющий в небытие современную посредственность, навсегда сохраняет воспоминания о великих работах. Только они передают потомству образ каждой следующей одна за другой эпохи, и поэтому имя Лапласа будет жить вечно. Но спешу добавить, что просвещенная и беспристрастная история никогда не отделит память о нем от памяти о других последователей Ньютона, и она объединит славные имена Даламбера, Клеро, Эйлера, Лагранжа и Лапласа. Я здесь ограничиваюсь лишь упоминанием великих математиков, которых потеряла наука и исследования которых имели общей целью совершенствование теоретической астрономии.

Чтобы дать справедливое понятие об из трудах было бы необходимо сравнить их друг с другом, но ограничения докладов, подобных этому, заставляют меня частично оставить подобное обсуждение для наших *Мемуаров*.

Вслед за Эйлером, Лагранж более всего привнес в основания математического анализа. В сочинениях этих двух великих математиков он превратился в отдельную науку, в единственную математическую теорию, про которую можно сказать, что она полностью и строго доказана [обоснована][7]. Из всех этих теорий она одна самодостаточна и доказывает [обосновывает] все остальные. И она настолько необходима им, что без ее помощи им пришлось бы оставаться весьма несовершенными.

Лагранжу было суждено изобрести и расширить все науки вычисления. Будь он по воле случая князем или мужиком, Лагранж оказался бы великим математиком. Он стал бы им наверняка и без всяких усилий, чего нельзя сказать о самых прославленных личностей, наиболее выдающихся в этой науке. Будь Лагранж современником Архимеда и Конона Самосского, он разделил бы с ними славу их самых памятных открытий, а в Александрии он оказался бы соперником Диофанта.

Отличительная черта его гения состояла в единстве и величии его взглядов. Он полностью посвящал себя простым, но обоснованным и высоким мыслям. Его основной труд, *Аналитическая механика*, можно назвать *Философской механикой*, потому что он отнес все законы равновесия и движения к единому принципу. И, что не менее примечательно, он подверг их единому, им же самим изобретенному методу вычислений. Все его математические сочинения примечательны особым изяществом, симметрией форм и общностью метода, а также, если можно так сказать, совершенством аналитического стиля.

Лагранж был не менее философом, чем великим математиком, и он доказал это всем ходом своей жизни, умеренностью своих пожеланий, непреклонной преданностью общим интересам человечества, благородной простотой манер и возвышенным характером, равно как и обоснованностью и глубиной научных трудов.

[4] Природа одарила Лапласа всей силой гениальности, которую требовал великий труд. Он не только объединил в своем *Альмагесте* XIX в. всё, уже установленное математическими и физическими науками и составлявшее основу астрономии, но добавил этой науке свои собственные фундаментальные открытия, ускользнувшие от всех его предшественников. Либо своими методами, либо при помощи тех, принципы которых указали Эйлер и Лагранж, он решил наиболее важные и наверняка самые трудные из рассмотренных до него проблем. Его настойчивость преодолевала любые препятствия, и, если первые попытки оказывались неудачными, он возобновлял их в самых остроумных и разнообразных формах.

В движении Луны, к примеру, наблюдалось ускорение, причину которого [философы] не могли обнаружить, и его приписали сопротивлению эфира, в котором движутся небесные тела[8]. Будь это так, та же причина, воздействуя на орбиты планет, стремилась бы всё сильней и сильней нарушить их первоначальную гармонию. Планеты испытывали бы постоянные возмущения и в конце концов были бы поглощены Солнцем. Для предотвращения или выравнивания громадных возмущений, которые произошли бы с течением времени, потребовалось бы новое действие сотворившей силы.

Эта космологическая проблема несомненно является величайшей из всех, которые мог бы задать человеческий разум, но теперь она решена. Первые исследования Лапласа о неизменности размеров солнечной системы и его объяснение векового уравнения Луны привели к следующему решению.

Вначале он выяснял, нельзя ли объяснить ускорение Луны тем, что действие силы тяжести [всемирного тяготения] является не мгновенным, а передается последовательно [импульсами], как свет. И он таким образом сумел выявить истинную причину ускорения[9]. Новое исследование вывело его гений на лучшее направление. 19 марта 1787 г. Лаплас сообщил Академии наук точное и неожиданное решение этой труднейшей проблемы. Он доказал в самой ясной форме, что наблюдаемое ускорение является необходимым следствием всемирного тяготения.

Это великое открытие кроме того осветило важнейшие факты в системе мира. Действительно, та же теория доказала ему, что, не будь воздействия тяготения на планеты мгновенным, пришлось бы предположить, что оно распространяется более, чем в 50 миллионов раз быстрее скорости света, которая, как хорошо известно, составляет $70{\cdot}10^3$ *лиг* в секунду[10]. И Лаплас также заключил из своей теории движений Луны, что среда, в которой вращаются планеты, не оказывает никакого ощутимого сопротивления их движению; в противном случае подобная причина особенно влияла бы на движение Луны, тогда как фактически никакого заметного воздействия она не оказывает.

Обсуждение движения планет чревато примечательными следствиями. Можно заключить, например, что [скорость] обращения Земли около своей оси постоянна. За две тысячи лет длина суток не изменилась даже на сотую долю секунды[11]. Примечательно, что для измерения расстояния до Солнца астроном не должен выходить из своей обсерватории; достаточно тщательно измерять вариации в движениях Луны и по ним достоверно установить его.

Еще более поразительное следствие относится к фигуре Земли, которая накладывает отпечаток на некоторые неравенства лунной орбиты: будь Земля идеальным шаром, их не было бы вовсе. Сжатие у полюсов земного шара можно определить по наблюдениям одних только движений Луны, и полученные таким образом результаты согласовались с данными произведенных великих геодезических путешествий [градусных измерений] у экватора, в северных районах, в Индии и в различных других странах. И именно Лапласу мы особенно обязаны этому поразительному совершенствованию современных теорий.

Я сейчас не имею возможности даже самым беглым образом перечислить его труды и открытия, к которым они привели. Помимо упомянутого исследования векового уравнения Луны и не менее важного и трудного установления причины великих неравенств Юпитера и Сатурна, можно указать на замечательные теоремы о либрации спутников Юпитера[12] и добавить аналитические исследования о приливах, которые Лаплас изучал исключительно широко.

Вряд ли найдется сколько-нибудь важная тема теоретической астрономии, которую Лаплас не исследовал с глубочайшим вниманием, и он также подверг исчислению бóльшую часть физических условий, опущенных его предшественниками. Проблемы о форме и круговом движении Земли сложны сами по себе, но он учитывал в них влияние распределения вод между материками, сжатия внутренних слоев и векового сокращения размеров земного шара.

[5] Из всех этих исследований мы должны особо выделить те, которые относятся к устойчивости великих явлений, ибо нет тем, более достойных для размышления философов. Из этой устойчивости следует, что причины, случайны ли они или постоянны, возмущающие равновесие океана, имеют границы, которые не могут быть нарушены. Поскольку плотность морской воды намного меньше плотности твердой части земного шара, колебания уровня океана неизменно содержатся в весьма узких границах; это никак не имело бы места, будь жидкость, распространенная по земному шару, намного тяжелее.

В общем, природа неизменно держит в запасе охраняющие силы, которые начинают действовать как только наступает возмущение, притом с силой, возрастающей вместе с необходимостью обращения за помощью к ним и тотчас же восстанавливают привычный порядок. И подобная сила имеется в каждой части вселенной. Форма великих планетных орбит и их наклонения со временем изменяются, но остаются в некоторых границах, а основные размеры сохраняются неизменными. И эта необъятная система небесных тел колеблется около своего среднего состояния, к которому она неизменно притягивается. Всё расположено в порядке, навечно, в гармонии[13].

В первоначальном жидком состоянии земного шара[14] самые тяжелые вещества расположились возле центра, и это предопределило устойчивость морей. Какова ни была бы физическая причина образования планет, она наложила на все эти тела как бы метательные движения по громадной окружности в одну и ту же сторону, что привело к устойчивости солнечной системы[15]. Порядок, также в системе спутников и колец [Сатурна], поддерживается силой центральной массы, и, вопреки предположению самого Ньютона и Эйлера, побочной силе не требуется исправлять или предотвращать возмущение, которое может произойти со временем. Сам закон всемирного тяготения достаточен для всего и всё регулирует, повсюду поддерживает разнообразие и порядок. Сотворенный некогда Верховной Мудростью, он главенствует с начала отсчета времени и предотвращает возможность любого беспорядка. Ньютон и Эйлер никак не были знакомы со всем совершенством вселенной.

Всякий раз, когда возникало какое-либо сомнение в точности закона Ньютона и для объяснения видимых неправильностей предлагалась любая посторонняя причина, глубокие исследования неизменно подтверждали первоначальный закон. Сегодня он объясняет все известные явления. Чем точнее становились астрономические наблюдения, тем лучше они соответствовали теории. Из всех математиков именно Лаплас самым глубоким образом исследовал эти великие проблемы и, так сказать, покончил с ними.

Нельзя утверждать, что ему, подобно Галилею и Архимеду, было дано создать совершенно новую науку; или, как Декарту, Ньютону и Лейбницу, придать математическим учениям оригинальные принципы и необъятный охват; или, как Ньютону, оказаться первым, кто поднял себя в небо и распространил на всю вселенную земную динамику Галилея. Но он, Лаплас, был рожден, чтобы всё совершенствовать, углублять, чтобы раздвигать границы познанного и решать то, что быть может полагалось неразрешимым. Будь это возможно, он завершил бы науку о небе.

[6] Та же характерная черта проявляется в его исследованиях по анализу вероятностей, этой огромной и вполне современной науке, цель которой часто не понимается, что приводит к самым неверным истолкованиям, хотя приложения ее когда-нибудь охватят всё поле человеческих познаний. Удачное дополнение к несовершенству нашего естества!

Это искусство возникло из утонченной и плодотворной идеи Паскаля, и с самого начала его разрабатывали Ферма и Гюйгенс [и Паскаль]. Философ и математик Якоб Бернулли был его главным основателем. Особо удачное открытие Стирлинга, исследования Эйлера и, в частности, изобретательная и важное приложение, данное Лагранжем[16] особенно усовершенствовали это учение. Оно было пояснено возражениями даже со стороны Даламбера и философскими взглядами Кондорсе, а Лаплас объединил его и установил его принципы. И возникла новая наука, подчиненная единому аналитическому методу[17] и простирающаяся необычайно широко. Плодовитая полезными приложениями, она когда-нибудь ярко осветит все отрасли натуральной философии [физики].

Если мне будет позволено выразить свое личное мнение, то смог бы добавить, что решение одной из основных проблем, которые прославленный автор рассматривал в 10-й главе своего труда, нам не представляется точным[18]. Впрочем, взятое в целом, это сочинение является одним из самых ценных памятников его гения.

[7] После упоминания подобных выдающихся открытий было бы бесполезно добавлять, что Лаплас состоял членом всех великих академий Европы. И я могу, и, возможно, должен сообщить, что он был облечен высокими политическими званиями, но такие сведения могли бы иметь только косвенное отношение к цели нашего доклада. Мы ведь прославляем память великого математика, мы отделили бессмертного автора *Небесной механики* от всех случайных фактов, которые не имеют отношения ни к его славе, ни к его гению. Какое, в самом деле, значение имеет для потомства, которому придется позабыть столько других подробностей, был ли Лаплас недолгое время министром великой нации. Важны те вечные истины, которые он обнаружил, – важны непреложные законы устойчивости мира, а не звание, которое он несколько лет носил в консервативном сенате[19]. Что существенно, и быть может даже еще существенней его открытий, это пример, который он подал всем тем, кто любит науку, и память о той несравненной настойчивости, которая поддерживала, направляла и вознаграждала столь многочисленные славные усилия.

И я поэтому пренебрегаю всеми случайными обстоятельствами и особенностями, которые не имеют отношения к совершенству его трудов. Но упомяну, что в главном органе исполнительной власти государства память Лапласа была красноречиво и дружественно отмечена тем, кто длительное время оказывал важные услуги историческим наукам, литературе и государству (маркиз Pastoret)[20].

И я особо отмечу ту литературную торжественность, которая привлекает внимание столицы. Французская академия[21], присоединяя свой голос к горячему одобрению родиной, решила, что она приобретет новую славу, наградив (Royer-Collard) торжество красноречия и политического достоинства. И в то же время она решила избрать преемником Лапласа прославленного академика (князя Daru), который использовал каждую грань [своего] таланта в литературе, в истории и в административной деятельности.

[8] Лаплас обладал преимуществом, которое судьба не всегда предоставляла великим людям. С самой ранней юности знаменитые друзья обоснованно ценили его. Вот сейчас перед нами еще неопубликованные письма, которые выказывают, с каким рвением Даламбер представлял его Военному училищу Франции и подготавливал для него, если это оказалось бы необходимым, более хорошее место в Берлине. Президент Бошар де Сарон издал его первые работы[22]. Все свидетельства оказанного ему дружелюбия напоминают о великих трудах и открытиях, но ничто не могло бы в большей степени способствовать успехам физических наук, чем его отношения с прославленным Лавуазье. Это освященное в истории науки имя связано с нашей вечной печалью[23] и нашим вечным уважением.

Эти знаменитые ученые [Лаплас и Лавуазье] объединили свои усилия. Они предприняли и завершили весьма обширные исследования, чтобы измерить один из важнейших параметров физической теории тепла. И примерно в то же время они провели длинную серию опытов о расширении твердых тел. Труды Ньютона достаточно хорошо показывают нам то значение, которое этот великий математик придавал специальным исследованиям в физических науках. Из всех его последователей Лаплас в наибольшей мере применял его экспериментальный метод[24]; он был почти так же велик в физике, как в математике. Его исследования рефракции, капиллярных явлений, барометрических измерений, статических свойств электричества, скорости звука, молекулярных сил и свойств газов свидетельствуют о том, что никакие исследования природы не были ему чужды. Он особенно радел о совершенствовании инструментов и за его счет известный механик изготовил весьма ценный астрономический прибор, который он передал Обсерватории Франции.

Лаплас прекрасно представлял себе все виды явлений [природы]; давняя дружба соединяла его с двумя знаменитыми физиками[25], чьи открытия расширили границы прикладной и теоретической химии. История присоединяет имена Бертолле и Шапталя[25] к имени Лапласа, который был счастлив, объединив их. Их встречи неизменно имели целью и результатом успехи в самых важных и трудных областях знания.

Сад Бертолле возле его дома в Аркуэле не был отделен от сада Лапласа, и этот уголок стал знаменит великими воспоминаниями и великой печалью. Именно там Лаплас принимал прославленных иностранцев, личностей с сильным умом, от которых наука либо приобрела, либо ожидала какую-либо пользу, но в первую очередь тех, кто с искренним усердием был привязан к святилищу науки.

Одни начинали свою карьеру, другим пришлось вскоре закончить ее. Лаплас принимал их всех исключительно вежливо. Он даже пошел так далеко, что тем, кто не представлял себе всю глубину его гениальности, давал повод поверить, что он сам может что-то почерпнуть из разговоров с ними.

[9] Упоминая математические труды Лапласа, мы особо отметили глубину его исследований и важность его открытий, но они выделяются еще тем, что оценили все его читатели, а именно литературными достоинствами. То, что он назвал [*Изложением*] *системы мира*, примечательно изящной простотой стиля и чистотой языка. До него сочинений подобного рода не было. Но, ожидай мы от них приобретения знания небесных явлений, мы получили бы весьма неуверенное представление об этой книге.

Отказ от символов, принятых в языке исчисления, не может способствовать ясности и не облегчает чтения. Этот труд является достоверным изложением результатов глубоких исследований[26], бесхитростной сводкой основных открытий.

Точность стиля, выбор методов [изложения?], величие темы придают особый интерес этой обширной картине, но ее истинное значение состоит в том, что она напоминает математикам те теоремы, доказательство которых было уже известно им. По сути она является содержанием математического трактата.

Иную цель имели чисто исторические работы Лапласа. Они с восхитительным талантом показывают математикам успехи человеческого разума в научных открытиях. И действительно, наиболее отвлеченные теории обладают свойственной им красотой выражения. Именно это поражает нас во многих трактатах Декарта, в некоторых станицах Галилея, Ньютона и Лагранжа. Новизна взглядов, возвышенность мысли и их связь с великими объектами природы привлекают внимание и наполняют ум. Достаточно, чтобы стиль был чист и благородно прост. И такой вид литературы избрал Лаплас, и он наверняка таким образом заслужил в нем место в первых рядах. Описывая историю великих астрономических открытий, он становился образцом изящества и точности. Ни один основной факт не ускользал от него, а описание никогда не становилось ни темным, ни двусмысленным. Что бы он ни назвал великим, таковым и являлось на самом деле, а то, что он опускал, не заслуживало упоминания.

[10] Вплоть до престарелого возраста Лаплас сохранил ту исключительную память, которую он выказывал с самых ранних лет; это – ценный дар, хоть и не гениальность, который стóит приобрести и удерживать. Он не занимался изящными искусствами, но ценил их. Ему нравилась итальянская музыка и поэзия Расина, и он часто наслаждался, декламируя наизусть различные отрывки из его стихов. Его дом украшали работы Рафаэля, которые висели рядом с портретами Декарта, Виета, Ньютона, Галилея и Эйлера.

Лаплас неизменно придерживался очень скромной диеты и постоянно сокращал ее, притом даже чрезмерно. Его весьма чувствительное зрение требовало непрестанного внимания, и ему удалось сохранить его без какого-либо изменения. Все эти заботы о себе имели единственной целью сберегать всё свое время и все свои силы для работы ума. Он жил для наук, и они обессмертили память о нем. Лаплас приобрел столь вредную для здоровья, но так необходимую для глубоких исследований привычку чрезмерно заниматься наукой. Впрочем, вплоть до двух последних лет жизни никакого ощутимого ослабления здоровья он от этого не испытывал.

При первом проявлении той болезни, которая унесла его, наступил тревожный момент бредового состояния. Но его ум всё еще занимала наука, и он с необычайным пылом рассуждал о движении планет, затем об особо важном, как он выразился, физическом опыте и объявил будто бы присутствовавшим возле него, что скоро обсудит всё это в академии.

Его силы постепенно убывали; его врач, месье Magendie, заслуживший его полное доверие и своим выдающимся талантом, и проявленной заботой, которую могло только внушить дружелюбие, находился у его постели, а его соратник и друг месье Бювар[27] не оставлял его ни на минуту. В окружении любимой семьи он оставался на глазах жены, чья чуткость помогала преодолевать неизбежные неудачи и неприятности в жизни и чьи мягкость и изящество убедили его в ценности домашнего счастья. Его сын, нынешний Маркиз де Лаплас, неопровержимо доказал свою сильнейшую привязанность к нему. И Лаплас был глубоко благодарен Королю и Дофину [наследнику престола] за повторно проявленные знаки внимания.

Те, кто присутствовал при его кончине, напомнили ему о его правах на славу и о его самых замечательных открытиях, он же ответил: “Нам известно лишь немногое, и необъятно то, чего мы не знаем”. Таков был по крайней мере смысл его последних слов, которые он произнес с трудом. Нам приходилось часто слышать, как он высказывал ту же мысль и почти теми же словами. Он всё больше и больше слабел, но боли не ощущал. И вот наступил последний час. Мощный гений, который длительное время воодушевлял его, отделился от своей бренной оболочки и вернулся на небо.

[11] Имя Лапласа прославило одну из наших провинций, вырастившую столь многих великих людей, – древнюю Нормандию. Он родился 23 марта 1749 г. и умер на 78-м году жизни, 5 мая 1827 г., в 9 часов утра[28]. Должен ли я напомнить вам о той унылой печали, которая тучей нависла над этим местом при объявлении рокового известия? Это произошло в день и даже в час ваших обычных собраний. Каждый из вас хранил скорбное молчание, каждый почувствовал тяжелый удар, нанесенный наукам. Все глаза обратились к месту, которое он так долго занимал среди вас. Одна только мысль наполнила ваши умы, и стало невозможно думать о чём-то ином. Вы разошлись под влиянием единодушного решения, и в этот единственный момент ваши обычные труды прервались.

Несомненно, что для великой нации достойно и прекрасно оказывать высокие почести памяти своих знаменитых сограждан. На родине Ньютона высшие лица государства пожелали, чтобы бренные останки этого великого человека были торжественно захоронены среди могил ее монархов. Франция и Европа выразили памяти Лапласа свою скорбь, безусловно с меньшей помпой, но быть может более трогательно и искренне[29].

Его сограждане оказали ему необычное почтение в лоне научного общества, которое только и могло оценить всю его гениальность. Голос науки в слезах был услышан во всех уголках света, куда только проникла философия. Теперь в наших руках оказалась обширная почта из каждой части Германии, из Англии, Италии и Новой Голландии [Австралии], из английских владений в Индии и из обеих Америк, и в ней мы находим те же выражения восхищения и скорби.

И в этом всеобщем горе, испытанным науками и столь благородно и свободно высказанном, не менее истины, чем в похоронной помпе Вестминстерского аббатства [национальном пантеоне Англии]. Прежде, чем закончить доклад, позвольте мне повторить мысль, которая представилась мне при перечислении здесь же великих открытий [У.] Гершеля [умершего в 1822 г.], но которая более непосредственно касается Лапласа.

Ваши преемники увидят завершение [истолкования] тех великих явлений, чьи законы он обнаружил. Они усмотрят в движениях Луны те изменения, которые он предсказал и причину которых он один смог установить. Непрестанное наблюдение спутников Юпитера увековечит память изобретателя теорем, которые управляют их траекториями. Великие долгопериодические неравенства Юпитера и Сатурна, придающие этим планетам новые положения, неизменно будут напоминать об одном из его самых поразительных открытий. Таковы права на истинную славу, которую ничто не сможет затмить. Зрелище неба изменится, но и в те далекие эпохи слава изобретателя никогда не умрет, потому что следы его гения отмечены печатью бессмертия.

Я представил вам некоторые черты знаменитой жизни, посвященной славе наук. Пусть ваши воспоминания восполнят недостатки столь слабого языка! Пусть возвысится голос родины, голос всего мира, чтобы прославить благодетелей народов. Только подобное уважение достойно по отношению к тем, кто, как Лаплас, смог расширить горизонты мысли и укрепить чувство собственного достоинства человека, раскрыв перед ним всё величие неба.

Примечания

1. Об этих успехах нам ничего не известно. О. Ш.

2. О вторичном переезде Эйлера в Россию см. Юшкевич (1968, с. 108). О. Ш.

3. В 1793 г. Парижская академия наук была упразднена, а в 1795 г. был учрежден Институт Франции (вначале под другим названием; нынешнее же появилось в 1806 г.), а Парижская академия стала его классом (отделением) физических и математических наук. В 1816 г. она вновь стала самостоятельной; впрочем, Институт Франции существует и поныне и объединяет 5 академий, в том числе и Парижскую. О. Ш.

4. В п. 8 это же училище названо Военным училищем Франции. О. Ш.

5. Автору следовало бы указать, что Лаплас всё-таки никак не отошел от математики (см. п. 1). О. Ш.

6. Сравнение не совсем удачно: система Птолемея отвергнута, *Элементы* Евклида сохранились. О. Ш.

7. Гораздо строже ее обосновал Коши; достаточно обоснована была геометрия, по меньшей мере вплоть до появления ее неевклидовой ветви. О. Ш.

8. Здесь методическая ошибка: как может сопротивление среды ускорить движение? Одно из предположений Лапласа, впоследствии отвергнутого им, было влияние замедления суточного вращения Земли (Morando 1995, с. 132). Заметим, что ускорение в таком случае оказалось бы только кажущимся, ср., однако, Прим. 11 к п. 4. О. Ш.

9. Это совсем непонятно: "истинная" причина ускорения тут же отброшена. О. Ш.

10. Иначе говоря, $70\cdot10^3\cdot 4.83 = 338\cdot10^3$ *км/сек*, т. е. ошибочно более, чем на 10%. О. Ш.

11. Современная оценка: удлинение на 3.2 часа за 500 млн лет или на 0.04*сек* за две тысячи лет. О. Ш.

12. В то время были известны 4 спутника Юпитера, в настоящее время – не менее 13. О. Ш.

13. Устойчивость солнечной системы доказана лишь для краткого (в космологическом смысле) периода. О. Ш.

14. Об образовании планет см. статью *Космогония* в БСЭ, 3-е изд., т. 13, 1973. О. Ш.

15. Уже в 1797 г. У. Гершель установил, что два спутника Урана движутся в попятном направлении. О. Ш.

16. Лагранж применил теоретико-вероятностные методы в теории ошибок; впрочем, до него это сделал Симпсон; мемуар Лагранжа был, однако, несравненно важнее в общематематическом смысле. О. Ш.

17. Мы бы сказали: единообразному применению нестрого доказанной им центральной предельной теоремы. По отношению к теории ошибок она оказалась малополезной. О. Ш.

18. Эта глава была посвящена модному в то время моральному ожиданию. О. Ш.

19. И всё-таки Фурье вполне мог бы добавить, что в 1819 г. Лаплас (безуспешно) рекомендовал запретить лотерею Франции, обрекавшую многих ее участников на нищету и способствующую росту преступности. Русский перевод его речи см. Шейнин (2007, с. 141 – 143). О. Ш.

20. Скорее маркиз A. D. Pastoret (1791 – 1857), государственный деятель и литератор, а не маркиз C. E. J. P. Pastoret (1756 – 1840), государственный деятель и юрист. Ниже Фурье упоминает еще двух лиц: P. P. Royer-Collard, Руайе-Коллара (1763 – 1845), государственного деятеля, публициста, философа, члена Французской академии, и князя P. A. N. M. B. Daru (1767 – 1829), администратора, литератора и историка, в (или с?) 1815 г. Президента Французской академии и, по Фурье, "преемника Лапласа", что непонятно. О. Ш.

21. Французская академия существует с 1635 г. и имеет целью изучение и совершенствование французского языка. О. Ш.

22. Математик и астроном J. B. G. Bochart de Saron, президент парламента. За свой счет издал работу Лапласа *Теория эллиптического движения и фигуры Земли*. Род. в 1730 г., в 1794 г. казнен. О. Ш.

23. Лавуазье был казнен в 1794 г. О. Ш.

24. До Ньютона экспериментальный метод применяли Галилей и Гюйгенс. О. Ш.

25. Мы бы сказали, что Бертолле и Шапталь (см. ниже) были химиками; впрочем, Ж. А. Шапталь (1756 – 1832) был скорее популяризатором химии. О. Ш.

26. В этом сочинении Лаплас (1796/1884, Прим. 7, с. 504; перевод 1982, с. 328) объяснил существование эксцентриситетов планетных орбит разностями температур и плотностей в различных частях планет, тогда как Ньютон доказал, что эти орбиты должны быть эллиптичными (круговыми лишь при определенных скоростях движения) с эксцентриситетом, зависящим от начальной скорости планеты. Причины, указанные Лапласом, могли лишь несколько исказить его. О. Ш.

27. А. Бювар (1767 – 1843), неутомимый вычислитель. Выполнил все подробные вычисления в *Небесной механике*; заподозрил существование трансурановой планеты (Нептуна). О. Ш.

28. Авторитетные источники указывают дату смерти 5 марта, а не 5 мая. Так, в частности, было сказано в редакционном примечании к тексту речи Пуассона (1827). Далее, известие о смерти Лапласа должно было дойти до Австралии (см. ниже), и Фурье должен был получить оттуда соболезнование до своего доклада (до 15 июня), но вряд ли это могло произойти в то время за 40 дней .

Несколько ниже не вполне четкая фраза Фурье означала, что в день смерти Лапласа Парижская академия отменила свое заседание; пример дала ей Петербургская академия, поступившая так же в день смерти Эйлера. О. Ш.

29. Эта фраза звучит сомнительно. О. Ш.

Библиография

Шейнин О. Б. (2007), *Вторая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также www.sheynin.de

Юшкевич А. П. (1968), *История математики в России.* М.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1796, франц.), *Изложение системы мира*. Л., 1982.

Morando B. (1995), Laplace. В книге *The General History of Astronomy*, vol. 2B. Ред. R. Taton, C. Wilson. Cambridge, pp. 131 – 150.

Poisson S. D. (1827), Discourse prononcé aux obseques de M. le Marquis de Laplace. *Connaisance des temps* pour 1830, pp. 19 – 22 второй пагинации. Перевод: Шейнин (2007, с. 162 – 165).

IV

Р. Л. Эллис

Об основаниях теории вероятностей

R. L. Ellis, On the foundations of the theory of probabilities (1842).
В книге автора *Mathematical and Other Writings*.
London, 1863, pp. 1 – 11

От переводчика

Эта статья написана с позиции субъективного восприятия вероятности (исключением является фраза в начале п. 11) и, видимо, философии Кондильяка, см. п. 2 и Прим. 2. Теорему Бернулли, на которую автор неоднократно ссылался, он так и не сформулировал и вообще не обратил внимания на содержавшуюся в ней оценку скорости сходимости статистической вероятности к теоретической.

Бернулли вовсе не отрицал возможности отклонения частости события от его вероятности; напротив, упомянутая оценка характеризовала именно ее. Об усиленном законе больших чисел, на который можно было бы также сослаться, автор, конечно же, не знал, но вот Пуассона мог бы вспомнить.

Рассуждение о суднах (п. 13) явно растянуто, а проблема учета обстоятельств при индуктивных выводах никак не была новой. В письме Якобу Бернулли 3 дек. 1703 г. Лейбниц (Gini 1946, p. 405) заявил, что учет обстоятельств важнее точных вычислений, и то же повторил Милль (1843/1914, с. 490), правда чуть позже, чем появилась статья Эллиса. Что именно важнее – не столь интересно; учитывать обстоятельства необходимо, но не следует считать математиков и статистиков глупцами: вообще никакие статистические выводы не должны быть сделаны чисто формально.

Эллис (1854) дополнил приводимую ниже статью, снова с сильным уклоном в философию (упомянул о дискуссиях между реалистами и номиналистами), но опять же ни слова не сказал о диалектике случайного и необходимого. Кроме того, он (с. 49) не совсем четко сформулировал "основополагающий принцип" теории вероятностей: *В длинной серии испытаний каждый возможный исход в конце концов стремится наступить в определенном соотношении*. *Исход стремится*, конечно же, не звучит (ср. Прим. 3), но подчеркнем, что Мизес (1928/1931, Предисловие) счел Эллиса (и Курно) своими предшественниками, и это признание оправдывает перевод предыдущей статьи.

1. Теория вероятностей – это одновременно и метафизическая [философская] и математическая наука. Ее математическая часть была полностью развита[1], тогда как ее метафизическая наклонность обращала на себя мало внимания. Это тем более примечательно, поскольку она [наклонность] прямо противоположна сути познания, как она обычно сейчас понимается.

2. Теория приняла свою нынешнюю форму в период преобладающего влияния школы Кондильяка[2]. Она отклоняет все ссылки на априорные истины как таковые и стремится установить их [истины] при помощи математических заключений из простого понятия вероятности.

Готовы ли мы признать, что наша уверенность в регулярности природы есть просто следствие из теоремы Бернулли? Что до ее публикации человек не мог дать никакого отчета о неизменно принятых убеждениях, на основании которых он всегда поступал? Если мы не готовы, то как можно это опровергнуть? Ибо подобные взгляды должны быть опровергнуты ввиду их всеобщей признанности, авторитета великих авторов, которые их обсуждали, и даже ввиду внушительной формы математического доказательства, в которую они были облачены.

Я буду доволен, если этот набросок хотя бы обратит внимание на совместимость теории вероятностей только с *совершенно необычной* философией.

3. Поскольку основные принципы математической теории всеобще известны, я лишь повторю их.

Если в данном испытании нет никаких причин ожидать появления одного события скорее, чем другого, эти события считаются равновозможными [см. статью Молина, Прим. 11].

Вероятность события равна числу равновозможных случаев […]. Если a_1, b_1, …, m_1 обозначают равновозможные случаи, которые могут произойти при одиночном испытании, a_2, b_2, …, k_2 – равновозможные случаи во втором испытании, […], то $a_1b_2a_3$, …, $a_1a_2b_3$, … окажутся равновозможными результатами всех испытаний вместе.

Отсюда следует, что при повторении одного и того же испытания k раз, вероятность событию произойти p раз, если его вероятность наступить в одиночном испытании равна m, окажется равной

$$\frac{k!}{p!(k-p)!}m^p(1-m)^{k-p}. \tag{1}$$

Это следует просто из учения о соединениях. И я таким образом упомянул все предложения, на которые мне придется ссылаться.

4. Если вероятность данного события установлена верно, то в длинном ряду испытаний оно будет иметь склонность[3] повторяться с частостью, пропорциональной этой вероятности. Это обычно доказывается математически, мне же это представляется априорной истиной[4].

Если при одиночном испытании мы ожидаем скорее одного события, а не другого, то с необходимостью верим, что в ряду аналогичных испытаний первое появится чаще второго. [Указанная] связь между этими двумя событиями видится мне в качестве непреложного факта. Или, скорее, не следует понимать, что я отрицаю возможность дальнейших исследований; но я считаю это фактом, очевидность которого должна основываться на обращении к умственным способностям.

Пусть кто-либо попытается придумать такой случай, при котором можно будет ожидать появления одного события в отдельном испытании и всё же полагать, что в ряду [подобных] испытаний чаще произойдет другое; или же вообразить себе другой случай, при котором можно будет отказаться от мысли, что ожидаемое событие произойдет чаще любого другого.

После изматывающего обдумывания этой проблемы я лично не смог отказаться от связи между более вероятным наступлением одного события, чем иного, или более предпочтительным ожиданием одного, а не иного, и верой в то, что в длинном ряду испытаний оно произойдет чаще.

5. Отсюда следует, что в предельном случае, в равной степени ожидая появления двух событий, мы верим, что в длинной серии испытаний они появятся одинаково часто. Мы, конечно же, можем ошибиться, но если это произойдет, то мы неверно ожидали их появления в равной мере и ошибочно полагали их равновозможными. Обратно, если события действительно равновозможны, в длинной серии испытаний они на самом деле будут иметь склонность появляться одинаково часто. Но это и доказывает наше утверждение, с которого мы начали данный параграф. Ведь если какое-либо событие может произойти в a из b равновозможных случаев, его вероятность будет равна a/b, и если в длинной серии испытаний все эти b случаев имеют склонность повторяться одинаково часто, то это событие должно иметь склонность повториться a раз из b возможных, ч. т. д.

6. Исследуем теперь математическое доказательство этого предложения; сейчас, по предположению, у нас совсем нет никаких оснований полагать, что равновозможные события имеют склонность происходить одинаково часто.

Хорошо известно, что то, что называется теоремой Бернулли, относится к сравнительной величине нескольких членов разложения бинома. Общий член бинома $[m + (1 - m)]^k$ равен (1), и он же – вероятность, что событие, имеющее вероятность m появления в одиночном испытании, произойдет p раз в k испытаниях. Отсюда следует связь между разложением бинома и теорией вероятностей.

7. Для пояснения того, что представляется мне существенным недостатком математического доказательства рассматриваемого предложения, достаточен частный пример. Монета подбрасывается 100 раз; существует 2^{100} [возможных] определенных последовательностей орлов и решеток, и все они равновозможны, если только монета честная, и ровно одна из них состоит из одних только орлов.

Очень большое число последовательностей будет иметь равное число орлов и решеток, и теорема Бернулли указывает, что в абсолютном большинстве из 2^{100} последовательностей разность между количествами тех и других окажется меньше пяти. При 1000 бросков в абсолютном большинстве из 2^{1000} возможных последовательностей та же разность будет меньше семи, что пропорционально меньше пяти, и т. д.

И всё это не только верно, но и важно, однако это не то, что нас интересует. Нам нужно выявить причину, по которой можно будет полагать, что в серии испытаний событие стремится появиться с частостью, пропорциональной его вероятности. Или иначе, что, вообще говоря, серия в 100 или 1000 [испытаний] обеспечит примерную оценку этой вероятности.

И тем не менее, хоть 100 орлов могут появиться только в одной последовательности, а равное число орлов и решеток – в очень многих случаях, нет даже намека для того, чтобы утверждать, что поэтому первая последовательность редка и примечательна, а вторая, по меньшей мере сравнительно, – обычна. Non constat (это точно не установлено), но единственный случай, приводящий к первой последовательности, может произойти настолько чаще, чем любой другой, из которого последует вторая, так что 100 орлов окажутся весьма обычным событием, а вторая последовательность – любопытной аномалией.

Увеличим число испытаний до 1000 или 10 000. И здесь имеет место то же самое возражение: теорема Бернулли доказывает только то, что одно событие более вероятно, нежели другое, т. е. что по определению оно может произойти в большем числе равновозможных случаев, но что нет совсем никаких причин, чтобы утверждать, что оно поэтому будет наступать чаще, или что именно это более естественно. Напротив, событие, которое [теорема Бернулли] называет маловероятным, может произойти 10 000 раз при одном-единственном появлении вероятного.

Отрицание этого означало бы признание того, что событие, происходящее в большем числе равновозможных случаев, будет наступать чаще, и тогда теорема Бернулли окажется ненужной. Она оставляет всю проблему на прежнем месте и не добавляет ничего нового.

8. И таким образом и обращение к умственным способностям, и невозможность отказаться от подобного признания приводит нас к утверждению следующего принципа. Если одно событие ожидается скорее, чем второе, то мы полагаем, что в длинной серии испытаний оно произойдет чаще. И мы, стало быть, усматриваем здесь свою привычку судить о сравнительной частости различных возможных результатов в серии аналогичных испытаний. Подобные суждения основаны не на случайных и переменных, а на постоянных обстоятельствах каждого опыта, т. е. на том, что называется сутью явления.

Наши суждения включают в себя основополагающую аксиому: в длинной серии испытаний действие случайных причин исчезает[5]. С этой аксиомой связана идея среднего из отличающихся друг от друга результатов и т. д. Я представляю себе эту аксиому как априорную истину, доставленную самим разумом, который неизменно пытается установить порядок и правильность в объектах своего восприятия.

9. Чтобы сократить изложение, я опускаю несколько интересных моментов, которые появляются здесь, а именно, связь между только что указанной аксиомой и принципом индукции; действительное значение теоремы Бернулли; и то, что представляется мне истинным определением вероятности[6], основанным на отношениях, установленных по длинным сериям испытаний.

Теперь я поясню сказанное несколькими выдержками из *Опыта философии* Лапласа.

10. Представляется очевидным, что никакие математические рассуждения, исходящие из предпосылок, которые не имеют отношения к законам природы, не могут установить подобных законов[7]. Несомненно, однако, что Лаплас полагал, что теорема Бернулли является обоснованием общего закона природы, простирающегося даже в область морали.

Описав теорему Бернулли, Лаплас (1814, в издании 1886 г. с. XLVIII/1999, с. 842 левый столбец) продолжал:

Из предшествующей теоремы можно вывести одно следствие, которое должно быть рассматриваемо как общий закон. А именно, что отношения произведений природы остаются приблизительно постоянными, когда эти произведения рассматриваются в большом количестве.[…] *Я не исключаю из предыдущего закона действий, вытекающих из нравственных причин.*

Лаплас, видимо, не заметил, что эта теорема основана на умственном [воображаемом] явлении ожидания. Но ясно, что это ожидание не могло бы никогда возникнуть без нашей веры в общее сходство прошлого и будущего, т. е. в закономерность природы, которая следует из указанного.

И несколько ниже Лаплас продолжал:

Из этой теоремы кроме того следует, что в неопределенно продолженном ряду событий действие регулярных и постоянных причин должно со временем перевешивать действие причин нерегулярных. […] *Благоприятные многочисленные шансы постоянно связаны с соблюдением вечных принципов разума, справедливости и гуманности, которые являются основой и поддержкой обществ; следовать этим принципам представляет большое преимущество, а уклоняться от них – значительное неудобство. Пусть всякий обратится к истории и своему личному опыту, и он увидит, что все факты подтверждают этот результат исчисления.*

Не оспаривая верности этого заключения, мы можем усомниться, что его следует считать "результатом исчисления". То же выражение Лаплас употребил непосредственно ниже, в том абзаце, в котором он, видимо, ссылался на историю своей собственной эпохи и на честолюбие великого вождя [Наполеона], которому он одно время служил.

И действительно представляется, что для Лапласа все уроки истории лишь подтверждали "результаты исчисления". Невольно возникает мысль сказать вслед за Цицероном "His ab artificio suo non recessit"(таким образом, он не отказывается от своей искусственной теории).

11. Результаты теории вероятностей выражают количества случаев, при которых может произойти данное событие, или частость его наступления в длинной серии испытаний. Их нельзя воспринимать как меру какого-либо состояния ума, и мы также не имеем права предполагать, что эта теория приложима повсюду, лишь бы существовало предположение в пользу утверждения, истинность которого точно не установлена.

И тем не менее теорию вероятностей применяли [для исследования] громадного множества индуктивных результатов, и я сейчас попытаюсь выяснить, успешно ли и каким образом.

12. Наша уверенность в любом индуктивном выводе изменяется в зависимости от множества обстоятельств, и *одно* из них – это количество частных случаев, по которым оно установлено. Мера той уверенности, на которую притязает теория вероятностей, зависит исключительно от этого количества. Но никто не станет отрицать, что сила индукции может изменяться при неизменности этого количества. И это рассуждение, как представляется, почти означает сведение к абсурду.

13. Если некоторое событие наблюдалось m раз, возникает предположение, что оно появится и при следующем случае. По оценке теории вероятностей, вероятность этого предположения равна $(m + 1)/(m + 2)$[8]. И здесь возникает два вопроса. Что означает следующий случай? И какова мера схожести нового события с предшествовавшими, чтобы можно было считать его повторением того же самого события?

Позвольте повторить пример покойного автора[9]. Вверх по реке плывут 10 судов, каждое под флагом, каждое принадлежит Ост-Индской компании. Предположение, что одиннадцатое судно будет также под флагом, имеет вероятность 11/12. Но можно ли будет считать каждое судно, от ялика до военного корабля, “следующим случаем”? […] И далее, пусть все флаги будут красными. Относится ли вероятность 11/12 к красным флагам, или к флагам вообще? […]

14. Перехожу к более известному приложению теории вероятностей. Все известные до сих пор движения планетной системы происходят с запада на восток, и это несомненно придает силу предположению о том, что для движения в указанном направлении существовала некоторая общая причина. Но ведь такое предположение зависит не только от числа наблюденных движений, но и от естественного сходства, которое в большей или меньшей степени проявляется между ними. […] Планеты движутся по орбитам с различными эксцентриситетами и в различных плоскостях, различаются по размеру, притом некоторые имеют много спутников, другие же – ни одного. […] Вплоть до конца 1811 г. было, видимо, известно (Лаплас) 100 комет, из которых 53 обладало прямым и 47 – попятным движением[10]. Допустим, что эти кометы постепенно теряли бы те особенности, которые отличают их от планет, и тогда мы имели бы 64 планеты с прямым и 47 – с попятным движением[11]. […]

15. Трудно без возражений согласиться с теорией, столь много следствий которой представляются противоречащими здравому смыслу человечества. Одно из самых поразительных быть может послужит ключом к разъяснению их сути. Если происходит какое-то событие, причина которого неизвестна, вероятность того, что его априорная вероятность более 1/2, оказывается равной 3/4. Таков по крайней мере общепризнанный результат[12]. Фактически, однако, априорная вероятность данного события не имеет никакого определенного значения и зависит от той точки зрения, под которой рассматривается событие. […]

16. Посмотрим, нельзя ли будет прояснить вопрос следующим образом. Пусть h – большое число испытаний, и вероятность определенного события в каждом из них равна $1/m$. Пусть, далее, во второй серии испытаний той же длины эта вероятность равна $2/m$ и т. д. вплоть до $(m-1)/m$ и 1[13]. […]

19. Целью этого наброска было скорее обратить внимание на его тему, а не обсудить ее полностью, и я опустил несколько обстоятельств, которые вначале имел в виду рассмотреть. Всё зависит от того принципа, что основа теории вероятностей – это необходимость признания наклонности серии испытаний к закономерности. И я также пытался показать призрачность оценок, доставляемых так называемой апостериорной теорией силы индуктивных выводов.

Будь эти два положения должным образом установлены, теория перестала бы находиться, как я не могу не думать, в своем нынешнем противопоставлении философии науки. Эта философия признает идеальные элементы познания и полагает, что процесс индукции зависит от них.

Примечания

1. Совершенно неверное утверждение. Автор не мог знать о позднейших классиках теории вероятностей, но должен был представить себе, что эта наука не закончилась на Лапласе (или Пуассоне). О. Ш.

2. Э. Б. де Кондильяк (1715 – 1780). Его логика была популярна в конце XVIII в. – начале XIX в. Он был последователем Локка, считал, что основой знания являются наблюдения и ощущения. О его влиянии на теорию вероятностей нам ничего не известно, но вот автор явно следовал за ним, см. конец п. 8. О. Ш.

3. "Событие имеет склонность": буквальный перевод. О. Ш.

4. Мы бы сказали: априорным предположением. И сам автор ниже доказывает это, по меньшей мере частично, но лишь с субъективной точки зрения. О. Ш.

5. Не исчезает, а оказывается сравнительно небольшим. К тому времени это было хорошо известно, и вот знаменитый пример (Fourier 1829/1890, с. 569): ошибка измерения высоты ступени пирамиды Хеопса, умноженная на 14 (на число, примерно равное $\sqrt{203}$, т. е. на корень из числа ступеней), определит ошибку высоты пирамиды. О. Ш.

6. Выражение "истинное определение" весьма неудачно. Далее, имея в виду общую ориентацию автора, мы не уверены, что опущенный им материал был достаточно интересен. О. Ш.

7. Совершенно неверное утверждение. Комплексные числа и функции комплексного переменного давно уже стали неотъемлемым объектом математики и крайне полезны также и в различных ее приложениях, но никакой непосредственной связи с природой они не имеют. О. Ш.

8. Эта формула встретилась у Лапласа в 1781 г. и повторена в *Опыте философии* (1814/1999, с. 837 левый столбец). Она относится к знаменитой задаче Прайса о вероятности последующего восхода Солнца, которую он сформулировал в своем Дополнении к мемуару Бейеса 1764 – 1765 гг. См. по этому поводу Zabell (1989). О. Ш.

9. Этот покойный автор остался неизвестным. О. Ш.

10. См. Лаплас (1812/1886, с. 263). Впрочем, Курно (1843, § 150) насчитал 125 комет, из которых (там же, § 160) 65 обладали прямым движением и 60 – попятным. О. Ш.

11. Автор таким образом имел в виду 12 планет. К тому времени было известно только 11 (4 из них – малых), и можно заключить, что он включил в их число Луну. Но тогда Эллису следовало указать, сильно укрепив свои возражения против индуктивных выводов, что еще в 1797 г. У. Гершель установил, что два спутника Урана обладают попятным движением.

Постепенное преобразование комет в планеты свидетельствует лишь о богатом воображении автора. О. Ш.

12. См. Pearson (1978, p. 368) и Zabell (1989/2005, p. 48). Вот вывод формулы для вероятности оказаться не менее 1/2:

$$P(p \geq 1/2) = \int_{1/2}^{1} p^{m-1}dp \div \int_{0}^{1} p^{m-1}dp = (2^m - 1) \div 2^m.$$

Здесь $m = 2$, а не 1; первый восход Солнца как бы не в счет: он лишь указал, что восход в принципе возможен.

Возражение автора, разумеется, обоснованно, но оно весьма ослабляется с возрастанием m. Вообще же обычное незнание априорной вероятности было сильным доводом против так наз. теоремы Бейеса, на основании которого она отрицалась в первой четверти XX в. О. Ш.

13. На основании этого примера (явно надуманного) автор весьма неубедительно обосновывал им же отрицаемый “общепринятый” результат, указанный в п. 15. Мы сочли возможным опустить окончание п. 16, равно как и пп. 17 и 18. В п. 18, опять же исходя из того же примера, автор сравнительно сложным путем получил по существу формулу, указанную нами в Прим. 12. О. Ш.

Библиография

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

Ellis R. L. (1854), Remarks on the fundamental principle of the theory of probabilities. В книге автора *Mathematical and Other Writings*. London, 1863, pp. 49 – 52.

Fourier J. B. J. (1829), Second mémoire sur les résultats moyens etc. *Oeuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 551 – 590.

Gini C. (1946), Gedanken von Theorem von Bernoulli. *Z. f. Volkswirtschaft u. Statistik*, 82. Jg, pp. 401 – 413.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей.* В книге Прохоров Ю. В., ред., *Вероятность*

и математическая статистика. Энциклопедия. М., 1999, с. 834 – 863.
Mill J. S., Милль Дж. С. (1843, англ.), *Система логики.* СПб, 1914.
Mises R. (1928), *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. Wien, 1931.
Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th centuries* … Лекции 1921 – 1933гг. Ред. E. S. Pearson. London.
Zabell S. L. (1989), The rule of succesion. *Erkenntnis*, Bd. 31, pp. 283 – 321. Также в книге автора *Symmetry and Its Discontents*. Cambridge, 2005, pp. 38 – 73.

V

С. Ньюком

Заметка о частоте различных цифр в натуральных числах

S. Newcomb, Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers
Amer. J. Math., vol. 4, 1881, pp. 39 – 40

От переводчика
Несколько авторов (Benford 1938; Feller 1971, pp. 63 – 64) доказали основное утверждение Ньюкома не сославшись на него, а Raimi (1976, p. 536) назвал его “вдохновленной догадкой” и указал, что оно всё-таки не универсально. В свою очередь, мы заметим, что утверждение Ньюкома эвристически напоминает знаменитую теорему Вейля, в соответствии с которой члены последовательности $\{nx\}$ равномерно распределены на единичном интервале. Здесь x иррационально, n = 1, 2, …, а фигурная скобка означает, что целые числа отбрасываются. В смысле теории информации утверждение Ньюкома означает, что каждое эмпирическое число как бы стремится предоставить одно и то же количество информации.

Каждому, кто часто пользуется логарифмической таблицей и замечает, насколько быстрее изнашиваются ее первые страницы сравнительно с последними, должно быть ясно, что цифры не встречаются одинаково часто. Чаще других первой значащей цифрой является 1, и их частота убывает до цифры 9.

Естественно возникает вопрос, не будет ли обратное иметь места для логарифмов; или иначе, не будут ли последние страницы таблиц антилогарифмов изнашиваться быстрее, чем первые, или же все ее части используются одинаково часто? И нам придется рассмотреть, какова вероятность, что у случайно выбранного натурального числа первая значащая цифра равна n_1, вторая n_2 и т. д.

Поскольку натуральные числа встречаются в природе, их следует считать отношением количеств[1], а потому нам следует выбирать по случаю не одно, а два числа и выяснить, какова вероятность, что первая значащая цифра их отношения равна n. Для решения этой задачи можно взять неопределенное число таких отношений, отобрав их независимо одно от другого, затем таким же образом исследовать частные этих отношений и продолжать этот процесс, чтобы определить предел, к которому стремится указанная вероятность.

Пусть числа, с которых мы начали исследование, расположены в группах, отличающихся друг от друга по числу их цифр, или, что то же, по характеристике их логарифмов с основанием a (в обычной системе логарифмов a = 10). Пусть два числа равны $a^{c_1+s_1}$ и $a^{c_2+s_2}$, где c_1 и c_2 – целые числа. Тогда значащие цифры их отношения не будут зависеть ни от c_1, ни от c_2, потому что изменения этих двух чисел изменят лишь положение запятой в дроби [при выборе десятичных логарифмов].

По этой причине мы можем выбрать и числитель, и знаменатель отношения из одной и той же группы. Более того, поскольку обе эти части дроби получены при помощи одного и того же процесса, можно предположить, что законы распределения чисел, из которых они были выбраны, совпадали. И тогда наша задача сводится к следующему.

У нас есть ряд чисел между 1 и a, представленный дробными степенями a (например, a^s), и распределение их показателей s, а потому и самих чисел произвольно. Поскольку эти показатели получены отбрасыванием всех целых чисел, можно предположить, что они расположены в соответствии с некоторым законом вдоль окружности.

Выберем 2^n показателей случайно, обозначим их s_1, s_2, s_3, …, тогда окончательное отношение, полученное описанным выше способом, будет равно

$$a^{s_1-s_2+s_3-s_4+\dots}.$$

Спрашивается, какова вероятность, что положительная дробная часть суммы $(s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots)$ будет заключена между s и $s + ds$. Ясно, что при любом законе первоначального расположения и возрастании n дроби будут стремиться к равномерному распределению по окружности, т. е. что искомая вероятность будет равна ds. Но указанная дробная часть есть мантисса логарифма предельного отношения, и мы заключаем, что *закон распределения чисел таков, что мантиссы их логарифмов равновероятны.* Иными словами, все части таблицы антилогарифмов используются одинаково часто.

Искомые вероятности появления первых двух цифр в натуральном числе таковы[2]

Цифра	**Первая цифра**	**Вторая цифра**
0		0.1197
1	0.3010	0.1139
2	0.1761	0.1088
3	0.1249	0.1043
4	0.0969	0.1003

5	0.0792	0.0967
6	0.0669	0.0934
7	0.0580	0.0904
8	0.0512	0.0876
9	0.0458	0.0850

Для третьей значащей цифры вероятности будут почти совпадать, а для четвертой и следующих цифр разности между ними окажутся незаметными.

Любопытно указать, что этот закон позволяет нам решить, состоит ли большое множество независимых числовых результатов из натуральных чисел или логарифмов.

Примечания

1. Можно полагать, что отрезок длиной 5*см* в пять раз длиннее единицы длины, но сказать, что 6 камней – это 6 одиночных камней, представляется несколько искусственным. О. Ш.

2. Цифре *n* в колонке *Первая цифра* соответствует $\lg[(1 + n)/n]$; так, $0.3010 = \lg 2$. О. Ш.

Библиография

Benford F. (1938), The law of anomalous numbers. *Proc. Amer. Phil. Soc.*, vol. 78, pp. 551 – 572.

Feller W. (1971), *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2. New York. Второе изд. Русского перевода этого тома (1967) мы не видели.

Raimi R. A. (1976), The first digit problem. *Amer. Math. Monthly*, vol. 83, pp. 521 – 538.

VI

Дж. К. Максвелл

Клонятся ли успехи физических наук к тому, чтобы в какой-то степени отдать предпочтение мнению о необходимости (или детерминизму) перед случайностью событий и свободой воли?

J. C. Maxwell, Does the progress of physical science tend to give any advantage to the opinion of necessity (or determinism) over that of the contingency of events and the freedom of the will?
В книге L. Campbell, W. Garnett, *Life of Maxwell* (1882).
New York, 1969, pp. 434 – 444

От переводчика

Авторы, опубликовавшие приводимый ниже очерк Максвелла, охарактеризовали его на своей с. 434 скорее как “искры из точильного камня его разума”, чем “стружку из его мастерской”. Тем не менее, эти *искры* заслуживают внимания, поскольку помогают создать общее впечатление об этом классике. Кроме того, исключительно интересны соображения Максвелла о неустойчивости, которую он, хоть и не совсем прямо, связал со случайностью. Дальнейший шаг в этом направлении сделал Пуанкаре (Шейнин 1995, с. 96). Приведем теперь аналогичную выдержку из его намного более раннего сочинения (1859/1890 или 1927, с. 295 – 296):

В динамике имеется очень общая и очень важная задача … Она такова: отыскав частное решение уравнений движения любой материальной системы, определить, приведет ли незначительное возмущение движения … к небольшому периодическому колебанию или к полному расстройству движения.

Максвелл подразделил свой очерк на три параграфа, но мы ввели более мелкие подразделения типа 1.1.

1. Общие свойства и наклонности человеческой мысли – тема, интересная не только профессиональным философам. Каждый из нас должен сам для себя принять какую-нибудь философию, хорошую или плохую, притом всё ее достоинство будет зависеть от того, что она – наша собственная, однако никто не продумывает ее до конца самостоятельно.

Для нашего утешения важно знать, находимся ли мы в общем потоке человеческой мысли или плывем против него. И если окажется, что направление потока и нашей личной мысли не совпадают, мы можем попытаться объяснить это широко распространенным заблуждением разума. Но нас больше удовлетворило бы какое-нибудь доказательство того, что не мы сами сбились с пути.

В подобного рода исследовании нам требуется некоторое мерило для сравнения, какой-то ориентир, по которому можно было бы установить направление, вдоль которого нас уносит. Книги, написанные в былые времена теми, кто раздумывал о тех же вопросах, были бы весьма полезны, не будь у нас склонности выносить из них неверные представления, истолковывая их в смысле, не известном тем, для кого они были составлены.

Существуют, однако, некоторые вопросы, образующие pièces de résistance (наиболее важное) в философии, на котором авторы всех времен истощили свои доводы и которые наверняка предоставят темы для обсуждения будущим поколениям, а потому могут указать, как мы плывем.

Тех из нас, кто хоть на что-то годен, начинали в некоторый момент своей юности беспокоить эти вопросы, и если только мирские заботы не душили полностью наши метафизические волнения, мы становились сторонниками либо необходимости, либо свободной воли. Что именно определяет наш выбор, для целей нашего очерка можно считать случайным. По Гальтону это вытекает из бесструктурных частиц наших родителей, которые, вероятно, так и не развились в течение их земной жизни и которые они быть может унаследовали, всё еще в скрытом виде, от несметного множества поколений.

Многое можно сказать в пользу подобного врожденного пристрастия к той или иной философской схеме, но в то же время мы должны признать, что в умственной истории человека немало зависит от событий, происшедших после его рождения. В общем и целом он более расположен придерживаться учений, согласующихся с тем множеством понятий, на которых в ходе своего образования он был побужден сосредоточивать свое внимание. Каков будет вероятный результат, если указанные понятия окажутся в основном относящимися к современной физической науке?

[1.1] Тесная связь между физической и метафизической науками заметна уже в их названиях. Каковы основные требования к физической лаборатории? Наличие возможностей для измерения пространств, времени и масс. А в чем состоят занятия метафизика? В размышлениях о видах различия между существующими совместно вещами, о неизменных последовательностях и о существовании материи.

Он – просто физик, лишенный всего вооружения, бестелесный дух, который пытается измерять расстояния в единицах своего собственного локтя; составлять хронологии с измерением интервалов времени числом относящихся к ним мыслей; и разрабатывать стандарт фунта из своего собственного самосозерцания.

У взятого в отдельности метафизика мы снова обнаруживаем, что какова его физика, такова и метафизика. Декарт, со своим совершенным пониманием математических истин и удивительной изобретательностью в воображении механических приспособлений, был далеко позади других великих людей своего времени по отношению к понятию материи как вместилищу количества движения и энергии.

Его учение о столкновении тел было смехотворно нелепым. Да, он признавал, что факты были против него, но объяснял их либо несовершенством твердости тел, либо воздействием окружающего воздуха. Его неспособность придти к тому понятию, которое мы теперь называем силой, усматривается в его объяснении твердости тел неподвижностью их частей. [Следует выдержка на латинском языке из второй части *Принципов философии* Декарта.]
По существу Декарт убежденно верил, что материя обладает лишь одним существенным свойством, а именно протяжением, и его влияние в сохранении этой вредной ереси ощущалось вплоть даже до самого недавнего времени.

Мнение Спинозы о материи, которое он приобрел от авторитетов, точно совпадало с декартовым. Он придал ей другую существенную функцию, а именно мысль, но эта новая составляющая не мешает первой и конечно же не приближает материю Декарта к ньютоновской.

Влияние физических идей Ньютона на философскую мысль заслуживает внимательного изучения. Его можно проследить весьма непосредственно через Маклорена и Стюартов до шотландской школы[1], все члены которой прослушали популярное изложение философии Ньютона в своих колледжах. В Англии

Бойль и Локк достаточно отчетливо отражают идеи Ньютона, хотя у них у обоих есть и свои собственные понятия. С другой стороны, Беркли[2], хоть и владел [в совершенстве] языком своего времени, нисколько не поддавался его (its) идеям. Сэмуэль Кларк[3] представляет собой возможно лучший пример влияния Ньютона, а [математика] Роджера Котса, несмотря на его умное изложение учений Ньютона, следует осудить как одного из самых ранних еретиков, взращенных в лоне ньютонианства.

Из этих и других примеров совершенно ясно, что всякое развитие физической науки, если только физические идеи были описаны понятным для философов языком, вероятно приводит к какому-то видоизменению их методов и понятий.

[1.2] В новое время основными разработками физических идей были

1) Идея о материи как о вместилище количества движения и энергии. Мы можем приписать ее Галилею и некоторым его современникам, а полностью ее выразил Ньютон в виде закона всемирного тяготения.

2) Обсуждение отношения между фактом всемирного тяготения и принципом, что материя не может действовать там, где ее нет.

3) Открытия в физической оптике в начале нынешнего века. Их действие вне научного мира оказалось намного слабее ожидаемого, и причин для этого было две. Прежде всего, трудно, особенно в эти дни отделения технического знания от популярного, описывать физическую оптику тем, кто не является математиком по собственному признанию. Во-вторых, чрезвычайно просто показать таким лицам великолепные сами по себе явления, и это часто признается обучением физической оптике.

4) Развитие учения о сохранении энергии. Это гораздо сильнее повлияло на мыслящий мир вне технической термодинамики. Как учение о сохранении вещества придало определенность утверждениям о бестелесности души, так и учение о сохранении энергии, приложенное к живым существам, приводит к заключению, что душа животного не является движущей силой наподобие ходовой пружины часового механизма. Она скорее служит как бы рулевым на корабле, т. е. не вызывает, а регулирует и направляет животную силу.

5) Открытия в области электричества и магнетизма находятся в том же неблагоприятном положении, что и в области света. Трудно удовлетворительно передать неспециалистам понятие о них, но легко показать им удивительные опыты.

6) С другой стороны, недавнее развитие молекулярной науки вероятно окажет сильное влияние на мыслящий мир. Учение о том, что тела, находящиеся по-видимому в покое, состоят из частиц, каждая из которых движется со скоростью пушечного ядра, но всё-таки никогда не отклоняются заметным образом от своего среднего положения, поражает в такой степени, что привлекает внимание непрофессионалов.

Но мне представляется, что важнейшее влияние молекулярной науки на образ нашего мышления будет состоять в том, что она навязывает ему отличие между двумя видами знания, которые мы для удобства назовем динамическим и статистическим.

[1.3] С научной точки зрения статистический метод исследования социальных проблем лучше всего описал Лаплас[4], а как популяризатор – Бокль. Людей объединяют в группы в соответствии с каким-либо признаком, и их число в группе принимается как его показатель. Таково сырье, из которого статистики пытаются вывести общие социологические теоремы.

Другие исследователи человеческой сущности поступают иначе. Они наблюдают людей по отдельности, устанавливают их жизненный путь, исследуют их побуждения и сравнивают их ожидания своих поступков с действительным поведением. Это можно назвать динамическим методом исследования в применении к человеку. Каковы бы ни были недостатки этого метода, он, очевидно, в принципе является единственным совершенным, а его отрицательные стороны скорее вызваны ограничением наших возможностей, а не неправильным образом действий.

Если мы прибегаем к статистическому методу, то тем самым признаем, что не можем проследить за подробностями каждого отдельного случая и ожидаем, что влияние разнообразных причин, хоть они и весьма отличны друг от друга от одного человека к другому, приведут к среднему результату, относящемуся ко всей нации. Изучив этот результат, мы сможем оценить сущность и склонности воображаемого существа, которое называется *средним человеком* [5].

Если молекулярная теория строения вещества верна, всё наше знание о веществе имеет статистический характер. По своим свойствам молекула весьма отлична от того тела, в состав которого она входит. Кроме своей неизменности и иных неясных свойств, она обладает скоростью, отличной от той, которую мы приписываем телу как единому целому.

Наименьшая частичка тела, которую мы способны различать, состоит из громадного числа таких молекул, и об этой группе молекул мы можем получить только статистическую информацию. На некоторый момент мы можем определить движение центра тяжести группы, но не какого-либо ее элемента, и сами эти элементы непрестанно переходят из одной группы в другую, хотя проследить за этим мы заведомо не в состоянии.

Отсюда следует, что закономерности, наблюдаемые в наших опытах над количествами вещества, содержащими миллионы миллионов молекул, того же рода, как те, которые объяснил Лаплас и которым поражался Бокль. Происходят они от смешивания множества случаев, каждый из которых вовсе не схож с остальными.

Обсуждение статистической темы доступно человеческому разуму и может при помощи признанных методов привести к обоснованным выводам. Тем не менее, сама форма получаемых результатов обладает определенными особенностями, которые указывают, что выводы относятся к области знаний, отличной от владений точной науки.

Они не являются симметричными функциями времени; существует громадная разница между историческими и нацеленными в будущее исследованиями, – между тем, хотим ли мы установить прошлое или будущее по известному нынешнему состоянию. В астрономии эти задачи отличаются друг от друга только в знаке величины *t*, времени; в теории диффузии вещества, в теориях теплоты или движения будущее всегда можно определить, прошлое же – лишь в исключительных случаях. Но могут существовать и другие случаи, при которых по нынешнему состоянию определяется прошлое, но не будущее. Тот процесс, который позволяет нам, анализируя нашу память, вспоминать прошлые события, возможно, относится к такого рода случаям.

[1.4] Многое может прояснить в некоторых из этих проблем рассмотрение устойчивости и неустойчивости. Если вещи таковы, что бесконечно малое изменение их нынешнего состояния лишь бесконечно мало изменит их состояние в какой-то будущий момент, то говорят, что система, либо покоящаяся, либо движущаяся, находится в устойчивом положении. Если такое же изменение может за конечное время вызвать конечное изменение в состоянии системы, ее положение называется неустойчивым. И если наше нынешнее состояние известно нам лишь приближенно, то ясно, что существование неустойчивых положений приводит к невозможности предсказывать будущие события.

Профессор Балфур Стюарт подходяще указал, что физическая устойчивость характеризует те системы, размышляя о которых детерминисты отыскивают свои доводы, а физическая устойчивость живых существ и моральная неустойчивость развивающихся душ придают сознанию убеждение в свободе воли.

2. Указав на некоторые отношения между физической наукой и нашей темой, мы теперь лучше подготовлены к тому, чтобы выяснить, что понимается под детерминизмом и свободой воли. Полагаю, что никто не станет придавать свободе воли более, чем бесконечно малую сферу действия. Нельзя изменить свое естество и нельзя просто по желанию, или, как некоторые говорят, *силой воли* прервать свой путь в жизни. Наша свободная воля в лучшем случае похожа на атомы Лукреция, которые в ничем не обусловленные моменты и в никак не обозначенных местах неопределенным образом уклоняются от своего пути.

В течение нашей земной жизни мы более или менее часто оказываемся на физическом или моральном водоразделе, когда незаметного отклонения достаточно, чтобы установить, в какую из двух долин мы начнем спускаться. Учение о свободе воли утверждает, что в некоторых подобных случаях определяющей причиной является одно только *я*; учение о детерминизме указывает, что во всех без исключения случаях результат полностью зависит от предшествовавших физических или умственных состояний субъекта и что *я* ошибается, если предполагает себя в каком бы то ни было смысле причиной фактического исхода. И то, что ему нравится считать решением, и окончательное действие фактически представляют собой события, соответствующие друг другу и вызванные теми же самыми установленными законами.

Но, когда мы упоминаем причины и следствия, мы всегда подразумеваем кого-то, знающего первые и выводящего вторые. Кто этот знаток, человек или божество? Если это человек, т. е. существо, способное наблюдать с определенной конечной степенью точности, то, как мы видели, он сможет предсказывать исходы хотя бы приближенно верно лишь в определенных случаях. Если же это божество, то я возражаю против любых доводов, основанных на предполагаемом знакомстве с условиями божественного предвидения.

3. Тема нашего очерка – отношение к детерминизму физической науки, а не богословия, метафизики или математики. И эта наука добывает свои исходные данные из наблюдения и измерения видимых вещей, но имеет целью разработку учений, согласование которых друг с другом окажется очевидным нашему разуму.

В соответствии с метафизическим учением от одного и того же предшествовавшего происходят те же последствия, и никто не может этого отрицать. Но в мире, подобном нашему, это утверждение малополезно: ничто не может произойти дважды, потому что предшествовавшее никогда не повторяется. И действительно, насколько нам известно, одним предшествовавшим могло быть точные время и место события, а в таком случае опыт ничего не подскажет. Указанная метафизическая аксиома будет полезна лишь для существа, владеющего знанием случайных вещей (scientia simplicis intelligentiae), по сравнению с которой простое всеведение фактов (scientia visionis) является лишь незнанием.

Несколько схожего физическая вида аксиома такова: из подобных предшествовавших состояний происходят подобные последствия. Но мы здесь перешли от *того же самого* к *подобию*, от полной точности к более или менее грубому приближению. Как я уже сказал, существуют определенного вида явления, при которых малая ошибка в исходных данных приводит лишь к малой ошибке в последствии. Таковы, например, главные явления в солнечной системе, а также те, при которых основная доля последствий определяется более элементарными законами динамики. Ход событий в таких случаях устойчив.

[3.1] Но есть и другие виды более сложных явлений, возможно сопровождающиеся неустойчивостью, причем их число чрезвычайно быстро возрастает с числом переменных. Выберем случай, относящейся к науке, следующей за астрономией по проявлению в ней порядка. При рефракции света направление отраженного луча зависит от направления падающего, так что, вообще говоря, при небольших изменениях второго первое изменится также незначительно. В среде с двойным лучепреломлением то же свойство имеет место для каждого из обоих отраженных лучей.

Но если направление луча в двуосном кристалле почти, но не совсем совпадает с оптической осью кристалла, небольшое изменение направления очень сильно изменит направление исходящего луча. Это, конечно, происходит ввиду особых свойств оптической оси; таких осей всего две, а возможных направлений линий в кристалле бесконечно много. Следует ожидать, что в более сложных явлениях существуют намного большее число особенностей, возле которых аксиома о подобных причинах, приводящих к подобным последствиям, уже неверна.

Так, условия, при которых взрывается пироксилин, изучены далеко не достаточно, но цель химиков состоит не столько в предсказании момента, в который пироксилин взорвется сам по себе, сколько в отыскании путем многочисленных и длительных опытов такого вида пироксилина, который при определенных условиях никогда не взорвется даже при небольших нарушениях и при его производстве, и при хранении.

[3.2] Во всех подобных случаях имеет место одно общее обстоятельство: рассматриваемая система обладает некоторым количеством потенциальной энергии, способной быть преобразованной в движение, но только после того, как система достигнет определенного очертания. Для этого требуется затрата работы, иногда бесконечно малой, и в общем не находящейся ни в каком определенном соотношении к энергии, проистекающей от нее.

Примеры: камень, отделившийся под действием мороза и удерживаемый в единственной своей точке на склоне горы; небольшая искра, от которой загорается весь лес; пустяшное слово, приводящее к битвам народов[6]; небольшое сомнение, препятствующее человеку исполнить свою волю; крохотная спора, поражающая всё картофельное поле; гаммула[7], которая делает нас либо философами, либо идиотами. Начиная с некоторого уровня каждый вид существования [существ] имеет свои особые точки, и чем выше этот уровень, тем их больше. И влияния, [приложенные] в этих точках, [пусть даже] так слабы в физическом смысле, что конечное существо не способно их учесть, могут привести к результатам величайшего значения.

Все великие дела, совершенные человеческими стараниями, обусловлены использованием этих особых состояний.

В делах людских поток мы видим, и в половодье к счастью приведет он[8].

Тактичный человек скажет “подходящее слово в нужный момент”; [и вообще] “как хорошо слово, сказанное в должное время!” Бестактный, напевающий свои песенки человеку в печали, подобен уксусу на селитре. Увещание, произнесенное несвоевременно, ужесточает сердце, а хорошее решение, принятое в момент, когда оно наверняка будет нарушено, оказывается щебенкой, которой вымощен путь в пропасть.

[3.3] И представляется, что в нашем собственном естестве больше особых точек, в которых предсказание возможно разве лишь при наличии совершенно точных данных и под руководством всеведения случайного, чем в любых менее организованных существах. Но особые точки по самой своей природе изолированы и не составляют никакой ощутимой доли на непрерывном пути нашего существования. Поэтому во многих случаях можно предсказывать поведение людей, во-первых, совсем бесхарактерных, особенно если рассматривать их в толпе при помощи статистического метода. Во-вторых, можно предсказывать поведение данного человека по поводу такого рода действий, относительно которых его характер устойчив.

Если поэтому те из занимающихся физической наукой, по которым образованные люди составляют свое понятие о физиках, и чья манера признается как накладывающая научный отпечаток на распространяемые ими учения, приходят при исследовании тайн науки к предпочтительному изучению особенностей и неустойчивостей, а не непрерывности и устойчивости вещей, то продвижение подлинного (natural) знания может способствовать устранению предубеждения в пользу детерминизма, видимо вызванного предположением о том, что физическая наука будущего окажется лишь увеличенным подобием прошлого.

Примечания

1. Мы можем назвать Дугалда Стюарта (1753 – 1828), которого, кстати, неоднократно упоминал Тодхантер (1865). Сам Максвелл в п. 1.4 ссылался на физика и метеоролога Балфура Стюарта (1828 – 1887). Шотландская школа или философия здравого смысла существовала в 1760-е – 1780-е годы (одним из ее членов был Дугалд Стюарт). Она полагалась на интуитивную достоверность, происхождение которой считала божественным. О. Ш.

2. Беркли известен как критик ньютоновского анализа бесконечно малых. О. Ш.

3. Философ и богослов Кларк (1675 – 1729). О. Ш.

4. Максвелл мог бы назвать и Курно. Обсуждения взглядов Бокля в историко-статистической литературе последних десятилетий мы не видели. О. Ш.

5. Напрасно Максвелл без комментариев сослался на среднего человека Кетле, см. Шейнин (1986, § 3). О. Ш.

6. Слово, хоть и не пустяшное, послужило поводом к франко-прусской войне 1870 – 1871 гг., см. статью *Эмсская депеша* в БСЭ (3-е изд., т. 30, 1978, с. 170). О. Ш.

7. Субмикроскопический зародыш во "временной" дарвиновской гипотезе пангенезиса. О. Ш.

8. Двустишие, автора которого Максвелл не указал. О. Ш.

Библиография

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1986), Quetelet as a statistician. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 36, pp. 281 – 325.

--- (1995), Понятие случайности от Аристотеля до Пуанкаре. *Историко-математич. исследования*, вып. 1 (36), № 1, с. 85 – 105.

Maxwell J. C. (1859), On the stability of the motion of Saturn's rings. *Scient. Papers*, vol. 1. Paris, 1927, pp. 288 – 376.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

VII

Э. Чубер

[Сведения о себе]

Staatsbibliothek zu Berlin, Preußischer Kulturbesitz,
Handschriften Abteilung
Darmst. H 1884 Czuber, acc Darmst. 1919.102

Уважаемой Прусской государственной библиотеке в Берлине

Отвечая на дружественное приглашение от 16 сего месяца, позволю себе кратко описать свою деятельность на приложенных листках для коллекции автографов Дармштедтера[1] и подписываюсь

С глубоким уважением, преданный Вам Э. Чубер

Гнигль возле Зальцбурга, 29.7.1919

Эммануил Чубер, род. 19 янв. 1851 г. в Праге

В 1876 г. защитил докторскую диссертацию в Немецкой высшей технической школе в Праге и в 1886 г. стал ординарным профессором математики в Высшей технической школе в Брюнне [Брно]. В 1891 г. был приглашен на ту же должность в Высшую техническую школу в Вене, в которой и работает до сего времени.

Кроме учебника (1898) он написал некоторое число трудов из области теории вероятностей и ее применения, в частности (1884; 1891; 1902 – 1914). Кроме того, многочисленные статьи по той же теме и по чистой математике. Принял участие в составлении *Энциклопедии математических наук* (1904) и в работе Международной комиссии по математическому образованию и ведал ее отчетами по Австрии.

Неоднократно занимался страховой наукой, особенно при составлении таблиц (1901 – 1905). С 1897 г. редактирует журнал, посвященный реальным училищам *Zeitschrift für das Realschulwesen*. В 1918 г. Высшая техническая школа в Мюнхене присудила ему степень почетного доктора технических наук.

Чубер

Примечания

1. Людвиг Дармштедтер (1846 – 1927) был химиком и коллекционером автографов деятелей в области естественных наук и математики. Свою коллекцию передал указанной библиотеке. О. Ш.

2. Чубер сообщает о самом себе в третьем лице. О. Ш.

Библиография

(1884), *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. Leipzig. Французский перевод: Париж, 1902.

(1891), *Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig.

(1898), *Vorlesungen über Differenzialrechnung und Integralrechnung*, Bde 1 – 2. Leipzig. Дальнейшие издания: 1898, 1906, 1912, 1917 – 1918 (и 1924).

(1901 – 1905), *Sterblichkeitstafeln für österreichische Versicherte*.

(1902 – 1914), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen* etc., Bde 1 – 2. Leipzig.

(1904), Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Enc. Math. Wiss*., Bd. 1, Tl. 2, pp. 733 – 767.

VIII

Е. Долежаль

Эммануил Чубер

E. Dolezal, Emanuel Czuber
Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Bd. 37, 1928, pp. 287 – 297

От переводчика
Даже с учетом особенностей подобных публикаций предлагаемый некролог представляется слишком парадным. В более спокойном тоне выдержан некролог другого автора (Lorey 1926). Да, Чубер был тружеником, но мы добавим: уже в начале XX в. началось преобразование теории вероятностей, появились первые попытки ее аксиоматизации, а Мизес предложил свою частотную теорию, последнее слово о которой, видимо, еще не сказано. Чубер, правда, занимался приложением этой теории, но всё-таки следовало четко сказать, что в ней самой он оставался на прежних позициях.

Опишем теперь мнение Чупрова о Чубере, высказанное им в нескольких письмах Борткевичу (Борткевич и Чупров 2005). Несколько раз Чупров заметил, что получил от Чубера оттиски статей.

Письмо № 133 1914 г., с. 198. "Есть в каждой отрасли писатели [авторы], с которыми должен быть тесный контакт. Неловко было бы *открыть* что-нибудь, что есть у Пуассона или у Лапласа или у Чубера".

Письмо № 146, 1920, с. 211. Статьи Чубера (1920a; 1920b) "малоинтересны".

Письмо № 165, 1921 г., с. 234 относительно статьи Чубера (1921a). "Малоизвинительно его недоумение (с. 85) по поводу [известного] …".

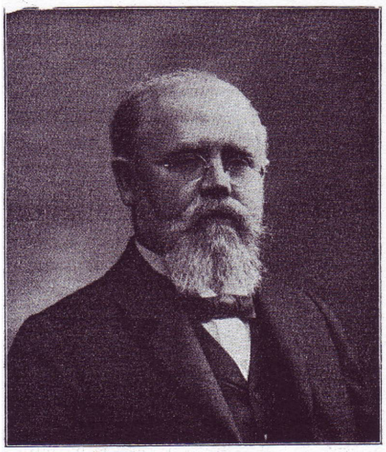
Письмо № 167 1922 г., с. 237. Чупров опубликовал рецензию (1924) на книгу Чубера (1921b), а в письме замечает: "Книга неважная, ниже обычного чуберовского типа".

Наконец, Чупров, видимо в конце 1924 г., высказал какие-то замечания на статью Чубера (1923) (Шейнин 1990, с. 45). Тот вскоре умер, а замечания не сохранились.

22 августа 1925 г. в Гнигле возле Зальцбурга [Австрия], где он провел свои последние годы, навсегда уснул Эммануил Чубер. Всепобеждающая смерть остановила его неустанный и неутомимо деятельный дух. Вместе с ним наука потеряла выдающегося руководителя в области теории вероятностей и ее применений и пионера во многих отраслях страховой науки.

Он родился 19 января 1851 г. в Праге, там же посещал народную и среднюю школу и закончил инженерное отделение тамошнего

Немецкого политехнического училища. Будучи еще студентом, он стал ассистентом на кафедре практической геометрии [геодезии] известного геодезиста и картографа доктора K. Koristka. В 1874 г., в соответствии с существовавшими условиями, после обучения он работал вспомогательным учителем II Немецкой гос. высшей реальной школы в Праге, а в 1878 г., после сдачи экзамена на пригодность к преподаванию, там же продолжал эту деятельность еще 8 лет в качестве преподавателя, а затем как профессора математики и начертательной геометрии.



В тот же период Чубер получил за свою диссертацию 1876 г. *Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung право преподавания* в Пражской немецкой высшей технической школе и в апреле 1886 г. стал ординарным профессором математики в Немецкой высшей технической школе в Брюнне [Брно]. В 1890/1891г. он занял там должность ректора.

Непосредственно после этого он перенял после профессора Антона Винклера кафедру математики II в Высшей технической школе в Вене и в 1894/1895 г. был избран там ректором. В 1899 г., будучи 48 лет от роду, получил чин надворного советника, что для того времени было высоким и редким отличием.

Там, в Вене, Чубер и преподавал образцово и не покладая рук в течение 28 лет, пока зимой 1919 г. не пришлось ему уйти в отпуск по болезни. Здоровье его не улучшилось, и в июле того же года он с тяжелым сердцем распрощался с училищем, со своими коллегами и слушателями, чтобы провести сумерки своей жизни в своем любимом поместье в Гнигле под Зальцбургом, в окружении исполинских и прекрасных Альп. В 1921 г., возрасте 70 лет он вышел на пенсию, так и не отработав последнего почетного года.

Чубер был личностью совершенно особой чеканки, проницательным исследователем, который гениально наметанным глазом приспосабливал теоретические результаты к практическим потребностям, мастером научного стиля, а для своих слушателей оказался не только почитаемым учителем, но и сердечным другом.

Особое предпочтение к той области прикладной математики, которая основана на теории вероятностей, Чубер ощущал еще будучи ассистентом кафедры геодезии, напряженно изучая ошибки наблюдения и уравнительные вычисления. Из его тогдашних высказываний следует, что одно время он даже носился с мыслью посвятить себя преподаванию геодезии. Позднее, однако, он занялся специальными исследованиями всех областей, в которых теория вероятностей могла найти обширное практическое применение.

Вскоре после защиты докторской диссертации Чубер (1879) переработал сочинение Мейера (1874), а затем впервые систематически описал геометрические вероятности и вытекающие из них почти точные средние значения в собственной хорошей книге (1884), позднее переведенной на французский язык[1].

Ко времени его преподавания в Праге относится и некоторое число его менее значительных геодезических работ, которые он написал в качестве редактора *Technische Blätter*, а также и другие статьи о точности определения координат пунктов и о теории эллипса ошибок. В брюннском периоде вышла его книга (1891) и интересная критика формулы Гаусса (1891)[2].

Своей вершины научные работы Чубера достигли в Вене. Сообщение (1899) и всеобъемлющий труд (1903) не только укрепили его репутацию, но и вывели его в первый ряд исследователей в области теории вероятностей и ее применений.

Мастерское владение этой теорией весьма пригодилось ему для практики страховой науки. В 1895 – 1900 гг. он принял на себя большую долю работы Комиссии по статистике смертности застрахованных в австро-венгерских обществах и в 1909/1910 г. занимался составлением австрийской таблицы смертности населения. Все его работы в этой области, как и издание немецкого перевода (1906) сочинения Муавра (1725) и исследования (1912; 1914), надолго сохранят значение для страховой науки.

В книге (1916), оставаясь объективным и спокойным, он при помощи профессиональных доводов возражал против плана национализации частного страхования, имевшего целью увеличить государственные доходы. Тем самым он показал себя всеобъемлющим властелином не только теории, но и всех фактических и числовых данных, а история страховой монополии в Италии очень скоро подтвердила точку зрения Чубера.

Его заслугой было и учреждение в 1894 г. курсов по технике страхового дела в Венской высшей технической школе, содержание которых было ему особенно близко. И Союз австрийских и венгерских техников страховой науки, президентом которого он был в 1898 г., исполнил свой большой и приятный долг перед этим действительно неутомимым работником учреждением фонда его имени.

Если многое из приведенного выше можно считать лишь заслугой местного масштаба, то его пионерные труды в области теории вероятностей и всех ее приложений, равно как и специальные работы по страховому делу прославили его имя далеко за пределами старой [австро-венгерской] монархии, и это ясно проявилось в 1909 г. на VI Международном конгрессе страховой науки в Вене. В качестве Президента конгресса Чубер заявил в типичных для него словах в своей вступительной речи:

Гордый институт страхования нуждается в новой душе. Он должен стать активным и утонченным, а этой душой является гуманизм. Так пусть в нашей работе неизбежные строгие формулы и колонки сухих цифр будут насквозь пропитаны гуманизмом!

Труды Чубера надолго останутся главной опорой при изучении теории вероятностей и техники страховой науки. Но следует особо подчеркнуть, что этот всеобъемлющий дух вовсе не закоснел в своей излюбленной специальной области, он скорее с неугасимым интересом обращался к другим ветвям математической науки. Большое число его чисто математических работ можно найти в изданиях научных обществ и во многих математических журналах. Описание научно-литературной деятельности Чубера наверняка оказалось бы неполным без упоминания его превосходных математических учебников (1898; 1909).

При становлении Чубера [как ученого] и во всей его сущности само собой подразумевается, что он уделял наибольшее возможное внимание всем вопросам преподавания. Как бывший учитель средней школы, редактор уважаемого журнала *Zeitschrift für Realschulwesen* , как председательствующий на экзаменах на аттестат зрелости в реальных училищах и эксперт нижне-австрийского земельного школьного совета он неоднократно побуждал к [усилению] математического обучения в этих училищах.

По поводу обучения в высшей школе Чубер активно выступал за тщательную подготовку по основополагающим дисциплинам, а в своих сообщениях в качестве члена различных комиссий по математическому образованию он пояснял изучаемый ими материал с самой современной точки зрения. Его исследование (1913) включало немало ценных рекомендаций и оказалось основой будущего плана преобразования высших технических училищ.

Чубер поистине самоотверженно трудился в Венской высшей технической школе и определенно находился среди ее выдающихся и самых успешных педагогов. Его лекции были лишены всякого пафоса, но логическими построениями и выразительным изложением ему всегда удавалось покорять слушателей и несомненно оживлять в какой-то мере сухой материал и возбуждать живой и сильный интерес, тесно связывая чистую теорию с многочисленными областями ее применения и с философской точкой зрения.

Педагогические и научные заслуги Чубера были заслуженно признаны за рубежом. Бельгийское общество естествоиспытателей в Льеже выбрало его своим членом-корреспондентом[3], Высшая техническая школа в Мюнхене [за рубежом Австро-Венгрии] присвоила ему степень почетного доктора технических наук, что доставило ему особую радость, а в истории Венской высшей технической школы Чуберу будет предоставлено почетное место.

Чубер был австрийцем старого закала, искренне привязанным к своей родине. Распад старой монархии [в 1918 г.] был для него исключительно тяжел. Инсульты, сопровождавшиеся проявлениями паралича, потрясли работоспособность старого ученого, которому и без того очень трудно было примирится с новыми условиями. Но при всем том, недовольство временем, возрастом и здоровьем не смогло принудить его сильный дух к отказу от работы. Его последним годам жизни мы обязаны трем ценным трудам (1921; 1923a; 1923b).

Неумолимая смерть в конце концов вырвала из рук неутомимого ученого то перо, которым он так блистательно владел и тем самым подвела черту действительно богатому плоду его жизни. Но из тысяч его благодарных учеников найдутся такие, в которых жив дух мастера и которые продолжат его труды и докажут, что не только материя, но и дух бессмертен. И всё-таки коллеги Чубера будут с тоской вспоминать дни совместной работы в те времена, когда духовность оценивалась не так, как ныне.

Слава памяти большого ученого и учителя!

Автор приложил **список публикаций Чубера**, из которого мы составили следующую неполную сводку журнальных статей, предварив ее, впрочем, перечнем его отдельных сочинений, также содержавшимся у автора.

(1879), *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig.

(1884), *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte.* Leipzig. Французский перевод: Париж, 1902.

(1889), *Zum Gesetze der großen Zahlen*. Prag.

(1891), *Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig.

(1898), Vorlesungen über Differenzial- und Integralrechnung, Bde 1 – 2. Leipzig. Последующие издания: 1906, 1912, 1917 – 1918, 1924.

(1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*. Leipzig. Последующие издания: 1908, 1914, 1924.

(1906), *A. De Moivre's Abhandlung über die Leibrenten*. Wien.

(1908), *Die Kollektivmaßlehre.* Wien.

(1909), *Einführung in die höhere Mathematik*. Leipzig. Последующие издания: 1921, 1922.

(1913), *Gedanken über eine Reform der Technischen Hoschschulen*. Wien.

(1916), *Die Zukunft des Versicherungswesens in Österreich*. Wien.

(1921), *Die statistischen Forschungsmethoden*. Wien.

(1923a), *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig.

(1923b), *Mathematische Bevölkerungstheorie*. Leipzig.

Technische Blätter, 8 статей, опубликованных в 1876 – 1891 гг.
Journal f. d. reine u. angew. Math., 13, в 1877 – 1902
Z. f. Math. u. Phys., 2, в 1887 – 1899
Monatshefte f. Math. u. Phys., 10, в 1890 – 1920
Archiv d. Math. u. Phys., 13, в 1877 – 1902
Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien, 6, в 1880 – 1903
Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereiniging, 4, в 1897 – 1915
Math. Z., 1, в 1922
Z. f. d. österreichischen Realschulen, 28, в 1892 – 1918
В журналах по страховому делу, 9, в 1902 – 1922

Примечания

1. Чубер определял, например, среднюю ординату дуги кривой по их дискретным значениям. О. Ш.

2. По этому поводу см. Шейнин (1995, с. 97 – 98). Основное замечание Чубера, которое он сформулировал вслед за обсуждением формулы Гаусса для эмпирической средней квадратической ошибки с Гельмертом: важна не так дисперсия статистической оценки сама по себе, как ее относительная величина, т. е. не $D\sigma^2$, а $D\sigma^2/\sigma^2$. О. Ш.

3. Несравненно важнее было бы упомянуть избрание Чубера почетным членом Королевского статистического общества (правда, лишь в 1923 г.). О. Ш.

Библиография статей, упомянутых в некрологе книг и статей и/или статей в наших комментариях

E. Czuber

(1891), Zur Kritik einer Gaußschen Formel. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, Bd. 2, pp. 459 – 464.

(1899), Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. *Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereiniging*

(1909), Über neue Sterblichkeitstafeln. *Assekuranz-Jahrbuch*

(1905), Neuere Sterblichkeitsuntersuchungen an Versicherten. *Z. f. d. ges. Versicherungswiss.*

(1912), Bevölkerungsstatistische Studien. *Versicherungswissenschaftl. Mitt.*

(1914), Beitrag zur Theorie statistischer Reihen. Там же.

(1920a), Der Mittelwert eines Quotienten. *J. f. d. reine u. angew. Math.*, Bd. 150, pp. 175 – 179.

(1920b), Über Funktionen von Variablen zwischen welchen Korrelationen bestehen. *Metron*, Bd. 1, No. 1, pp. 53 – 61.

(1921a), Über die Berechnung statistischer Reihen auf ihren Zufallscharakter. *Skand. Aktuarietidskr.*, Bd. 4, pp. 65 – 96.

(1921b), *Die statistischen Forschungsmethoden.* Wien.

(1923), Lineare Ausgleiching und Korrelation. *Arch. f. ges. Psychol.*, Bd. 44, pp. 172 – 182.

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926).* Берлин. Также www.sheynin.de

Шейнин О. Б., Sheynin O. B., (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка.* М.

--- (1995), Helmert’s work in the theory of errors. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 49, pp. 73 – 104.

De Moivre A. (1725), *Treatise on Annuities of Life*. В книге автора изд. 1756 г.: *Doctrine of Chances* (1718). London, 1756; New York, 1967, pp. 261 – 328.

Lorey W. (1926), Nachruf auf E. Czuber. *Z. f. d. ges. Versicherungswiss.*, Bd. 26, pp. 117 – 124.

Meyer A. (1874), *Cours de calcul des probabilités.* Bruxelles.

Tschuprow A. A. (1924), Рецензия на книгу Czuber (1921b). *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, 3. Folge, Bd. 63, No. 4, pp. 378 – 379.

IX

Дж. М. Кейнс

Рецензия на книгу Czuber (1908 – 1910)

J. M. K. [Keynes], рецензия на книгу Czuber (1908 – 1910)

J. Roy. Stat. Soc., vol. 74, 1911, pp. 643 – 647

[1] Профессора Чубера следует поздравить с завершением исчерпывающего трактата по математической теории вероятностей и математической статистике, который включает суть большей части его исследований на эти темы, опубликованные за последние 27 лет. Несмотря на объем в 900 страниц, его книга написана в высшей степени сжато, поскольку он рассмотрел очень широкий круг вопросов и непосредственно связал их с основополагающими теоремами математической вероятности. Это новое и существенно расширенное издание должно будет надолго остаться стандартным руководством по тем предметам, которое оно описывает. На английском языке нет никаких сочинений с той же шириной охвата, а по владению материалом и доскональности его трактат существенно превосходит французские работы, которые в наибольшей степени притязают на сравнение с ним.

Расширив первое, однотомное издание 1903 г. до двух томов, автор смог включить важные дополнения, и для читателей, знакомых с предыдущим изданием, будет, возможно, подходяще краткое указание на основные изменения. В первую часть, которая описывает собственно теорию вероятностей, добавлено около 40 страниц, в основном с целью подчеркнуть философские стороны темы. Вторая часть, посвященная теории ошибок и сочетанию наблюдений, осталась по существу без изменения. Вся третья часть, озаглавленная *Учение о коллективах*, и рассматривающая статистические частости, полностью нова. Существенно дополненная четвертая часть, *Математическая статистика*, состоит из трех разделов, но лишь первый из них относится к общей теории, второй – к статистике смертности, а третий – к инвалидности. Расширена философская сторона математической статистики; полнее обсуждаются таблицы смертности, а описание статистики инвалидности и ее отношения к статистике смертности является в основном новым. Пятая часть о математических основах страхования жизни также расширена и в частности включает новые подразделы о страховании от инвалидности и о государственном страховании.

[2] Составленная только что сводка показывает, что наиболее общий интерес представляют первые три части, т. е. первый том, и первый раздел четвертой части (первые 78 страниц второго тома). Остальной материал второго тома в основном описывает методы, относящиеся к техническим подробностям, которыми следует заниматься только тем, кто изучает страхование и статистику смертности. Для них несомненно полезно будет приблизить эти подробностей к более фундаментальным теоремам. Но очень полное изложение этих, а не иных приложений в трактате общего характера является довольно произвольным[1].

По отношению к основополагающим вопросам в первой части Чубер принял вероятно лучший для своего математического в основном трактата способ изложения. Он не пытается тщательно исследовать философские трудности, а после краткого и часто методически полезного обсуждения принимает выводы, которые, как мыслящий здравый смысл мог бы разумно ожидать, в конце концов будут обоснованы философами. Он не решил никаких более запутанных проблем философии теории вероятностей, но почти неизменно формулирует временные выводы, которые на общих основаниях ныне представляются наиболее разумными.

Со времени появления первого издания он под влиянием новых немецких источников отошел несколько дальше от того, что мы можем назвать *дизъюнктивной теорией* и оказался несколько ближе к *относительной теории*. Первую, как я полагаю, впервые предложил для обсуждения F. A. Lange[2], и в Германии, но нигде больше, довольно многие поддержали ее. Она основывает вероятность в весьма фундаментальном смысле на дизъюнктивном суждении о гипотезах. С другой стороны, в соответствии с *относительной теорией* ударение ставится скорее на те данные, на которых основана вероятность и к которым ее следует относить. *Частотная теория*, в которой вероятности в каждом случае очень тесно связаны со статистическими частостями, и которую впервые предложил Эллис, Чубер явно отрицает.

Полностью рассмотрена теория геометрических вероятностей, которая предоставляет основные примеры вероятностей с бесконечным количеством случаев. Метод средних значений и весьма представительное число примеров перепечатаны из предыдущего мемуара[3]. В подобных случаях [задач на геометрические вероятности] часто возникают парадоксы и противоречия, как, например, в примере Бертрана о нескольких возможных вероятностях случайной хорде данного круга превысить по длине сторону вписанного в круг равностороннего треугольника. Чубер приписывает их двусмысленности задачи, т. е. различным возможным истолкованиям выражения *случайная хорда* в парадоксе Бертрана. Он, однако, не смог точно указать, в чем состояла неопределенность и почему подобные примеры иногда приводят к противоречивым заключениям, а иногда – нет[4].

Тщательно рассмотрено правило Лапласа о вероятности повторения событий[5]. Оно сформулировано таким образом, который не подтверждает иногда встречающихся более поразительных выводов из него. Однако, обсуждение индуктивных вероятностей и их вывода по заданным частостям в начале второго тома не очень удовлетворительно. Этот вопрос чреват последствиями, которые невозможно рассматривать в рецензии, но нам представляется, что метод Чубера, не слишком отличающийся от применявшегося классиками теории вероятностей, скрывает тот факт, что статистическая индукция в принципе не отличается ни от какого иного вида индукции. Это позволило ему придавать исключительно высокие вероятности на основаниях, которые по общему признанию полагались бы недостаточными для иных типов научной индукции.

Рассмотрим следующий пример. За 1866 – 1877 гг. в Австрии родилось 4 311 076 мальчиков и 4 052 143 девочки, а в период 1877 – 1894 гг. – 6 533 961 мальчик. Каковы в соответствии с этими данными вероятные пределы количества женских рождений [в том же периоде]? Заключать только на основе указанных данных, как это делает Чубер, что существует вероятность 45 249/45 250, что этими пределами являются числа 6 118 361 и 6 164 813, противно здравому смыслу[6].

Переходя к более мелким темам, заметим, что имеется некоторое число остроумных примеров на алгебраические вероятности, которыми славились *Educational Times* и которые иногда до сих пор встречаются в экзаменационных билетах. Особо интересно по своей простоте решение примера xiii на вероятность одному их двух кандидатов на выборах, за которого подано *a* голосов, неизменно опережать второго, за которого подано *b* голосов, $a > b$, если заполненные бюллетени вынимаются из урны поочередно[7].

[3] Важнее перепечатка весьма примечательной теоремы Чебышева, из которой теоремы Бернулли и Пуассона могут быть выведены в качестве частных случаев. Она строго, без приближений доказывается простейшим алгебраическим способом без применения дифференциального исчисления. Помимо простоты и изящества доказательства, теорема [сама по себе] настолько ценна и так мало известна, что имеет смысл сформулировать ее. […][8]

Чубер, однако, не ссылается ни на какие другие интересные мемуары Чебышева по теории вероятностей, многие из трудов которого, появившиеся в основном до 1870 г., были впервые опубликованы по-русски, и, хотя его самые важные теоремы время от времени перепечатывались в *Journal für die reine und angewandte Mathematik* и *Journal de mathématiques pures et appliquées*, они не были легко доступны вплоть до появления в Петербурге собрания его сочинений на французском языке, завершенного в 1907 г.[9] И по этой причине его теоремы вовсе не так хорошо известны, как они того заслуживают.

[4] Повсюду в книге Чубера добавлены многочисленные ссылки на новейшую немецкую литературу, что весьма ценно для английских читателей. Менее исчерпывающе Чубер знаком с литературой во Франции и Англии. Кратко упоминаются методы Пирсона подбора кривых плотностей к статистическим рядам[10] и недавнее обсуждение закона ошибок Эджуортом, но нет и намека на современную теорию корреляции и на ее главенствующее положение в нынешней английской статистической теории. Это – весьма заметное упущение, потому что никто не подготовлен лучше Чубера к составлению какого-то описания мнения континентальных ученых об этих современных разработках[11]. Впрочем, труд по овладению большим числом статей и мемуаров, рассеянных в весьма разнообразных журналах, в которых теорию корреляции следует ныне разыскивать, вполне может сбить с толку каждого, кто не был воспитан на них. Быть может английским статистикам придется ждать до тех пор, пока они не представят свою работу в таком сжатом и прозрачном виде, в котором Чубер составил свой труд, и только после этого ожидать ее оценки немецкими мыслителями. Во всяком случае, сравнение содержания книги Чубера или любых иных недавних немецких трактатов об учении о коллективах с только что вышедшей книгой Юла (1911) весьма примечательно указывает вдоль каких отличающихся друг от друга направлений продвигаются лучшие нынешние статистики наших двух стран.

Методы Чубера непосредственно происходят от методов классиков теории вероятностей и теории ошибок и характерны стилем и ясностью, которые по этой причине естественно приданы им. Но читатель не преминет почувствовать, что эти методы достигли завершения и ничего особо нового не может произойти от попыток их дальнейшего совершенствования. С другой стороны, последние английские работы, хоть они и отрывочны, и часто темны или неточны, видимо несут в себе зачатки дальнейшего развития и вносят методы математической статистики в новые области. В настоящее время преимущество за Чубером. Здраво судя о вопросах философии и применяя изысканные математические методы, он сводит в единое целое и завершает те виды статистических исследований, которые были разработаны в течение прошлого века на основе идей, порожденных Лапласом и Гауссом.

Примечания

1. Возможно, что Чуберу следовало уделить больше внимания статистике населения вообще (а не только статистике смертности). О. Ш.

2. Чупров (1909) несколько раз ссылался на книгу Ланге (1877). О. Ш.

3. Нам известен мемуар Чубера (1884) и книга того же года издания. О. Ш.

4. О геометрических вероятностях см. Шейнин (2005, гл. 12).

5. Это "правило Лапласа" (1814/1997, с. 837, левый столбец) относилось к знаменитой и чисто методической задаче английского статистика Прайса, которую он сформулировал в комментарии к посмертному мемуару Бейеса 1764 г.: восход Солнца наблюдался миллион раз подряд; определить вероятность последующего восхода. О. Ш.

6. Кейнс (1921/1973, с. 384 – 385) и позднее критически описал рассуждение Чубера, но заметил, что тот наверное имел в виду особую устойчивость соотношения мужских и женских рождений. Не совсем верно: как указал Борткевич (1923, с. 13 – 14/2008, с. 113), Чубер (1910/1968, с. 13) сослался на устойчивость статистических отношений вообще; само его рассуждение см. там же, с. 15 – 16. О. Ш.

7. *Educational Times* – приложение к газете *Times*. Кейнс сформулировал так называемую задачу о баллотировке, решенной в 1887 г., см. Феллер (1950/1964, с. 81 – 82).

8. Кейнс привел формулировку закона больших чисел в форме Чебышева (1846) в чуть измененной форме. Ни сам Чебышев, ни Чубер (1910/1968, с. 228) не оговорили независимости рассматриваемых случайных величин, а утверждение о вероятности, более высокой, чем $1 - 1/\alpha^2$ не сопровождалось у них условием $\alpha > 1$. Второе уточнение исключает ничтожный вариант теоремы, первое же существенно; уже Муавр отличал друг от друга зависимые и независимые события, а Гаусс (например, 1823, § 18) специально упоминал независимость наблюдений. О. Ш.

9. Двухтомное собрание сочинений Чебышева вышло в свет в Петербурге в 1899 – 1907 гг., отдельно по-русски и по-французски; французское издание перепечатано (Нью-Йорк, 1962). Если не считать ни магистерскую диссертацию, ни лекции Чебышева (изданные лишь в 1936 г.), то остаются только три его мемуара по теории вероятностей. Теорема, сформулированная Чубером, появилась в 1846 г., одновременно и на русском, и на французском языках, также и второй мемуар 1867 г. Только третий мемуар был опубликован вначале по-русски в 1887 г., а по-французски позже, в 1891 г. Ни Бертран, ни, что гораздо хуже, Пуанкаре вообще не упомянули Чебышева, но Пуанкаре забыл и о Лапласе, и о Пуассоне (не говоря о Маркове и Ляпунове). О. Ш.

10. Кейнс имел в виду статью Пирсона (1896), а чуть ниже – статью Эджуорта (1905). Эти работы Чубер действительно описал (т. 2, с. 21 и т. 1, с. 251 соответственно в перепечатке 1968 г.). О. Ш.

11. Кейнс не мог предположить, что через год подобная книга появится в России (Слуцкий 1912). Впоследствии он (1921; 1926) высказал высокое мнение о Чупрове. О. Ш.

Библиография

Гаусс К. Ф. (1823, латин.), Теория комбинации наблюдений. В книге автора *Избр. геодезич. сочинения*, т. 1. М. ,1957, с. 17 – 57.

Слуцкий Е. Е. (1912), *Теория корреляции*. Киев.

Чебышев П. Л. (1846), Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей. *Полн. собр. соч*., т. 2. М. – Л., 1947, с. 14 – 22.

Чупров А. А. (1909), *Очерки по теории статистики*. М. Последующие издания: 1910, 1959.

Шейнин О. Б. (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Также www.sheynin.de

Bortkiewicz L., Борткевич В. И. (1923), Wahrscheinlichkeit und statistische Forschung nach Keynes. *Nordisk Statistisk Tidskrift*, Bd. 2, pp. 1 – 23. Перевод в книге Шейнин О. Б., составитель (2008), *Пятая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин, также www.sheynin.de. С. 105 – 124.

Czuber E. (1884a), *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. Leipzig.

--- (1884b), Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. *Sitz. Ber. Kais. Akad. Wiss. Wien*, Math.-Naturwiss. Kl., Bd. 90, pp. 719 – 724.

--- (1908 – 1910), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*, Bde 1 – 2. Leipzig. Второе издание. Перепечатка: New York, 1968.

Edgeworth F. Y. (1905), The law of error. В собрании сочинений автора *Writings in Probability, Statistics and Economics*, vol. 1. Cheltenham, 1996, pp. 325 – 383.

Keynes J. M., Кейнс Дж. М. (1921), *Treatise on Probability. Coll. Writings*, vol. 8. London, 1973.

--- (1926), Professor A. A. Tschuprow. *Econ. J.*, vol. 36, pp. 517 – 518. Перевод в книге Шейнин О. Б, составитель (2007), *Четвертая*

хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики. Берлин, также www.sheynin.de. С. 181.
Lange F. A. (1877), *Logische Studien*. Iserlohn.
Laplace P. S., Лаплас П. С. (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В книге *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1997, с. 834 – 863.
Feller W., Феллер В. (1950, англ.), *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. М., 1964.
Pearson K. (1896), Skew variation in homogeneous material. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A186, pp. 343 – 414.
Yule G. U. (1911), *Introduction to the Theory of Statistics*. London. Большое число последующих изданий.

X

Т. Софонеа

Лейбниц и его проект основания института государственного страхования

T. Sofonea, Leibniz und sein Projekt
zur Errichtung staatlicher Versicherungsanstalten.
Schweiz. Versicherungszeitschrift, Bd. 25, 1957, pp. 144 – 148

Готфрид Вильгельм Лейбниц был одним из самых многосторонних и проницательных мыслителей в духовной истории человечества. Право, история, политика, философия, логика, математика, физика, религия, языкознание являются лишь важнейшими областями из тех, которые обязаны ему своим продвижением. Этого неповторимого человека с его неутомимым стремлением ко всестороннему просвещению можно без преувеличения считать одним из очень немногих *универсальных гениев* всех времен. И вряд ли будет удивительно, если мы упомянем, что его всеобъемлющий дух занимался и страховым делом.

Мы имеем в виду не его открытие дифференциального и интегрального исчислений[1], которые неизгладимо повлияли на все области чистой и прикладной математики, а потому и на страхование, а те его работы, непосредственно относившиеся к страхованию. И помимо сочинений, в которых Лейбниц занимался темами, которые принадлежат области финансовой и страховой математики, например, его рукописи 1683 г.[2], он составил смелый и прозорливый проект института государственного страхования, чье содержание мы должны будем обрисовать. Его практическая и реалистическая точка зрения свидетельствует о стремлении позаботиться также и об экономических и социальных проблемах[3].

В неопубликованной [при жизни] памятной записке без названия и даты он изложил проект института государственного страхования всех случаев в жизни или по меньшей мере убытков от наводнений и пожаров[4]. Во введении Лейбниц указывает, что каждый несколько более обеспеченный человек расходует намного больше средств, чем его предки. Князья не только расширили свои дворы, но хотят и обязаны содержать армии. И таким образом они подражают иноземной роскоши, не учредив никаких мер и не думая об экономии средств, что могло бы сделать подобные затраты терпимыми.

И поэтому давно пора было найти выход из этого положения, пока Германия не оказалась добычей возрастающей мощи своих соседей. И им будет намного легче добиться этого, потому что Германия совсем не так густо населена, как перед Тридцатилетней войной [1618 – 1648], а благосостояние страны в первую очередь покоится на количестве ее населения. Напротив, товары стали в основном дороже, так что за 300 талеров вряд ли можно купить то, что наши предки приобретали за 100 или даже 50. Ввиду нынешнего положения князьям приходится постоянно быть готовыми к войнам и заботиться о новых средствах, не обременяющих нетерпимо подданных, которые помогли бы смягчить нищету.

Средства, которые Лейбниц имел в виду, не должны были быть новым налогом, – придумать подобные было бы совсем просто. Намного важнее было учесть два обстоятельства. Во-первых, как налоги могли бы пойти на пользу; и, во-вторых, как можно их скрасить, чтобы они стали приемлемыми. В соответствии с основными принципами меркантилизма Лейбниц усматривал условия экономического роста в величине населения и обладании деньгами.

Желательно, разъяснял он, принять такие меры, которые могли бы принести существенную выгоду и властям, и подданным, но не зависели бы ни от внешних влияний, ни от новых налогов; которые, напротив, немало побудили бы подданных, поубавили бы их заботы и облегчили пропитание.

Как в природных сообществах родители и дети, мужья и жены, бары и холопы должны совместно переносить радость и горе[5]*, так и справедливость в республике или гражданском обществе*[6] *требует, чтобы случай, обременивший по воле Господа одного, а не другого, также разделялся всеми, требует взаимной помощи* (с. 13; здесь и ниже страницы указаны по изданию 2000г.).

Характерная черта всех форм общества состоит в том, чтобы разделять убытки и выгоды. Почему в многотысячном обществе, цель которого состоит в общем благополучии, кто-то должен безучастно взирать на ущерб, понесенный другим? Ведь каждый получает пользу от других, и улучшение состояния любого крестьянина или горожанина благоприятно для всех. Из этого следует, что тому, кто не по своей вине понес потери ввиду несчастья, непреодолимой силы или случайности, в благоустроенном государстве необходимо не только облегчить тяготы, “но и действительно помочь пожертвованиями” (с. 13).

Опираясь на общность опасностей и на заповедь о любви к ближнему, Лейбниц требует взаимопомощи в масштабе всего государства. Затем он обсуждает следующее возражение: Почему нужно разделять только несчастье? Почему бы и не удачу? Лейбниц отвергает эту мысль. Даже не учитывая, что удача случается очень редко, в интересах государства, чтобы каждый сам зарабатывал свой хлеб и не становился обузой для других. И если Господь сподобит кого-либо особой удачей, то тем самым Он поможет и его согражданам, потому что налоги и повинности распределяются в соответствии с состоянием каждого (с. 13 – 14).

Далее Лейбниц учитывает второе возражение: Часто бывает невозможным провести четкую границу между виновным и невинным в собственной беде. Не смущаясь своей верой в доброту человека, он неизменно готов помочь своему ближнему. И хотя многие становятся бедными и нищими по собственной вине, следует помогать и им, говорит Лейбниц, потому что несчастье часто приводит к злобе и нерадивости. Горемык, стало быть, необходимо "действенно поддерживать", а "хорошее устройство страны и постоянные усилия должны приводить в порядок" злоумышленников и лодырей.

Несчастье легко приводит и к отчаянию, которое у одних вызывает злобу, у других – вялость, и им всё становится безразличным. Как тот, кто долго плыл против течения, они опускают руки и отдаются волнам. Легко поэтому понять, что одним из самых действенных средств против злобы и нерадивости состоит в том, чтобы не бросать людей на произвол судьбы, а своевременно спасать их, пока добро в них еще борется с несчастьем (с. 14).

Лейбниц полагал, что государство как страховщик потребностей, которые возникают в этих особых случаях, могло бы заранее позаботиться, но не об извлечении из них выгоды, а о пользе для граждан. Чтобы предотвратить отрицательное воздействие бедных и необразованных людей, обремененных большими семьями, следовало бы предусмотреть принудительное сообщество. Лейбниц поясняет:

Я не считаю, что республика должна безвозмездно, без возмещения, покрывать каждое несчастье, а полагаю, что власти должны по праву что-то получить, должны оказываться наравне со страховщиками в торговых городах. Там страхование быстро исчезнет, если страховаться станут только суда, терпевшие бедствие. И если подобная прекрасная помощь исчезнет, многие, желающие заняться торговлей, будут лишены такой возможности. И поэтому помогать сохранению страхования должны и счастливые, и потерпевшие. Легко заключить, что каждый, а не только переносящие несчастные случаи, обязан уплачивать ежегодную страховку. В свою очередь, власти, являющиеся страховщиком, обязаны возмещать убытки от оговоренных несчастных случаев (с. 14 – 15).

Ясно, что помощь потерпевшим не должна быть ни займом, ни задатком, а страховым возмещением. Плохая услуга будет оказана, если им придется возвращать выручившую их сумму, что "было бы по существу равноценно отсутствию помощи”. Если появится желание превратить помощь в задаток, то многие “предпочтут один раз выстрадать, чем оказаться навсегда прикованным всепожирающими процентами”.

Затем Лейбниц подчеркивает существенное экономическое значение страхования для сосредоточения капиталов. Страховые кассы были бы благодатным учреждением для страны. Они накапливают капиталы, при помощи которых государство могло бы помогать тем, кто оказывается в стесненных обстоятельствах и делать добро, особенно пострадавшим от пожаров и наводнений, равно как и от других несчастий (с. 15).

Главная заслуга памятной записки состоит в общем формулировании преимуществ страхования. Лейбниц подчеркивает благотворное влияние страхования на предотвращение потерь и упоминает о существенном источнике силы в собираемых средствах для общественного благополучия. “Таким образом можно улучшать дороги, осушать болота и преобразовывать их в хорошие земли и производить многие другие чудесные улучшения в стране” (с. 18).

Благоразумное правительство может без долгих размышлений принять на себя страхование своих граждан от упомянутых опасностей. Страховые кассы должны, однако, использоваться исключительно для наибольшей пользы стране: для облегчения жизни, помощи усердным, но обедневшим, и тем, кто безвинно оказался несчастным. Одним словом, то, что как будто внесено подданными, должно быть использовано исключительно для поддержки и улучшения их жизни (с. 18).

В своем всеобъемлющем проекте Лейбниц не забывает и о практической стороне дела и упоминает технические детали страхования. Так, например, при страховании от наводнения следовало бы оценивать страховое возмещение с учетом соответствующих потерь за последние десять лет. И он приводит доводы в пользу полного отделения прибыли от страхования от других государственных доходов и за их управление чиновниками, принявшими присягу, и т. д. Наконец, на примере гамбургской кассы он обсуждает возможность ограничения огневым страхованием.

И таким образом в этой памятной записке намечены некоторые важнейшие гениальные идеи, рассмотренные великолепным образом. Поистине удивительно видеть в ней отклик на многочисленные нынешние социальные усилия, к осуществлению которых мы подошли лишь двести лет позднее.

По Лейбницу, человек воспринимается не как отдельное существо, а как частичка общества, в котором он живет. И оно не должно выражать интересы какой-нибудь группы, оно обязано представлять общие потребности всех своих членов. Истинное общество опирается не столько на национальные традиции, сколько на культурный и духовный слой, т. е. на сообщество, скрепленное общими идеалами. В этом смысле Лейбниц критически рассматривает мысли, которые связаны с самыми современными стремлениями и повседневными проблемами. Цель общества –

благосостояние его отдельных членов, и оно должно достичь того материального изобилия и той безопасности, которые для этого необходимы. Выяснить, что страхование является безусловной предпосылкой для достижения этой цели и наметить более широкую основу для его осуществления – вот славная заслуга этого мощного мыслителя.

Примечания

1. Автор почему-то не упомянул Ньютона, ср. также Прим. 2. О. Ш.

2. Краткое изложение этой статьи, в которой оригинальным образом выведено разложение $1/(1 + i)^n$ [в степенной ряд], см. мою статью (1957). Т. С. [Лейбниц мог бы просто воспользоваться общим разложением $(a + b)^\alpha$, которое Ньютон указал в 1676 г.].

3. Рецензия на статьи этого рода см. Bodemann (1884). Т. С.

4. Часть статьи из ее публикации 1871 г. вместе с ошибками, допущенными Бодеманом (1884), появилась также в книге Schwarz (1948, с. 74 и след.), а также в Schmitt-Lermann (1954, с. 47 и след.). Т. С.

5. В первобытном обществе не было супругов в современном понимании, и вряд ли в феодальном обществе барин и холоп *совместно переносили* и т. д. О. Ш.

6. Республик (латинское *res publica* означало общественное дело, но не гражданское общество в современном смысле) в тогдашней Германии не было. Мы бы сказали *справедливость в общественном устройстве*. О. Ш.

Библиография

Bodemann E. (1884), Leibnizens volkswirtschaftliche Ansichten und Denkschriften. *Preussische Jahrbücher*, Bd, 53, pp. 378 – 404.

Leibniz G. W. (1683), Meditatio iuridico-mathematica de interusurio simplice. С немецким переводом в книге автора (2000, pp. 273 – 293).

--- (1986), *Sämmtliche Schriften und Briefe*, Reihe 4, Bd. 3. Berlin.

--- (рукопись 1680, опубл. 1871), Öffentliche Assekuranzen. В книгах автора (1986, pp. 421 – 432; 2000, pp. 12 – 19).

(2000), *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik.* Berlin. Редакторы Knobloch E., von der Schulenburg Graf J.-M.

Schmitt-Lermann H. (1954), *Der Versicherungsgedanke im deutschen Geistesleben des Barock und der Aufklärung*. München.

Schwarz H., редактор (1948), *Wiener städtische Versicherungsanstalt*. Wien. Статья 50 Jahre städtische Versicherung.

Sofonea T. (1957), Leibniz e l'assicurazione. *Bolletino delle Assicurazioni Generali*, pp. 35 – 42.

XI

Редакционная статья
Введение

Introduction. *J. Stat. Soc. London*, vol. 1, 1838, pp. 1 – 5

Примечание переводчика

Лондонское (впоследствии – Королевское) статистическое общество было учреждено по предложению Кетле (Шейнин 1986, п. 2.1). В предлагаемой редакционной статье (фактически: в официально объявленных целях Общества) мы видим повторное указание на то, что статистика лишь собирает и упорядочивает факты, но не обсуждает их. Затем, правда, следует уточнение: следствия допускаются, но лишь из выверенных данных и на основе математических доказательств.

Эти, казалось бы, справедливые условия нереальны: не было ни в то время, ни может быть и сейчас достаточно выверенных фактов, а доказательства возможны не математические вообще, а только вероятностные. Точка зрения Общества не была необычной; аналогично высказывались в то время Деламбр и Фурье (там же, п. 1.1), а Кетле далеко не сразу осознал, что статистические сведения лишь вероятны (там же, п. 2.2).

Теперь несколько слов о России (Дружинин 1963). К. Герман, 1806 (с. 46 и 47): "Предмет статистики есть состояние государства"; статистика "не судит" о своем предмете.

И. Срезневский, 1839 (с. 139 и 157): Политэкономия – это часть статистики (и статистика поэтому делает выводы из фактов); астрономы выводят законы из своих наблюдений, и статистика должна поступать аналогично. Хорошо!

Д. П. Журавский, 1846 (с. 216): он описал предмет *нравственной* (моральной) статистики, о которой англичане умолчали, понимая ее очень широко, включив в нее даже благотворительность. Сейчас, впрочем, следовало бы добавить, например, подвижность населения.

По мнению Совета Лондонского статистического общества пришло время, когда члены Общества и общественность будут с удовлетворением приветствовать появление журнала, посвященного сбору и сравнению фактов, поясняющих состояние человечества и способствующих развитию принципов [новых идей], определяющих прогресс общества.

Лишь в течение последних нескольких лет наука статистики начала активно изучаться в нашей стране; и даже сейчас не будет, возможно, излишним объяснить широкому кругу читателей ее цели и установить границы ее области. Слово *статистика* происходит от немецкого слова *Staat*, которое, как и английское *state*, означает сообщество, существующее в социальном объединении. Словами Программы нашего Общества можно поэтому сказать, что статистика – это установление и сбор тех "фактов, которые, как полагают, поясняют положение общества и его виды на будущее". Цель статистической науки состоит в исследовании (the object … is to consider) результатов, доставляемых ими [фактами], чтобы определять те принципы, от которых зависит благосостояние общества.

Наука статистики отличается от политэкономии, потому что, имея в виду те же цели, она не обсуждает (does not discuss) причин и не рассуждает (nor reason) о вероятных последствиях. Она лишь стремится собирать, упорядочивать и сравнивать ту группу фактов, которые одни только и могут основать верные заключения о социальном и политическом управлении обществом.

Таковы те цели, которым, выполняя намерения нашего Общества, будет посвящен этот журнал. И Совет Общества уверенно смотрит в то будущее, когда усилиями своих собственных членов и соответствующих обществ по всей стране журнал станет существенным инструментом развития и распространения знания истины и выявления и устранения ошибок и предубеждений.

Ни у одного другого общества, и ни одного существующего издания нет перед глазами более важной или интересной цели. "Самое благородное исследование человечества состоит в изучении человека", и нельзя отрицать, что знание и должная оценка тех фактов, которые определяют и поясняют цивилизацию, богатства, силу и счастье нашей собственной нации и других стран, не менее полезны, чем любая иная наука.

Поле, охватываемое статистикой[1], весьма обширно. Она тесно примыкает к другим наукам, каждая из которых вносит в нее свой вклад. Она действительно служит звеном, которое связывает их все с практическими целями жизни. И поэтому никакое статистическое описание страны не может быть безупречным без включения ее географии, т. е. без описания протяжения и вида ее поверхности, изобилия или недостатка воды, степени жары или холода, сухости или влажности в зависимости от ее географического положения. Также и без учета многих других первостепенных условий существования, каждое из которых более или менее влияет и на деятельность и удобство человека, и на накопление и потребление богатства.

Статистика связана с геологией, поскольку та имеет отношение к минеральным богатствам страны, и с сельским хозяйством. Она также включается в ту отрасль зоологии, которая указывает источники питания, возможности занятости в промышленности и торговле[2].

Отличительные признаки нецивилизованных народов определяются либо их географическим положением, либо характером окружающего их животного царства. Люди, принадлежащие к ним, становятся охотниками или рыбаками в зависимости от того, изобилует ли дичь или рыба. Если на них нападает лев или медведь, они проявляют смелость и находчивость, они хитры и искусны, когда их прокорм зависит от охоты на оленей и перепелов. Если есть у них лошадь, они становятся мародерами, а если скот – пастухами[3].

Шерстяная промышленность нашей страны обязана своим существованием наличию особой породы овец, а процветание французской торговли шелком во многом зависит от тутового шелкопряда и шелковицы. Последний пример поясняет связь статистики с ботаникой. Производство шелка зависит от подходящего питания для шелкопряда, а ботаника, которая обнаруживает свойства и применения растительного царства, выбирает это питание, и садоводство указывает лучшие способы его производства и увеличения его поставок.

Нет необходимости в описании того, как каждая тема, относящаяся к собственно человечеству, образует часть статистики. Таковы население; физиология; религия; обучение; литература; богатство во всех его формах; сырье; производство [товаров?]; сельское хозяйство; мануфактуры; торговля; финансы; управление; и, чтобы объединить всё это, – всё, что относится к физическому, экономическому, моральному или умственному состоянию человечества.

Механика изыскивает средства для сокращения объема человеческого труда; химия существенно входит в структуру прикладных наук; медицина применяется к телу человека, и все эти науки служат интересам человека, а их сила и влияние могут быть описаны статистикой. Даже астрономия, выявляющая влияние небесных тел на сезоны, и метеорология, которая объясняет причины и шансы атмосферных изменений[4], связаны со статистикой, потому что и сезоны, и атмосфера существенно влияют на занятия и физическое состояние человека. И по существу всё на Земле было дано для использования человеком, и все вещи при их создании были так предопределены, чтобы способствовать его пользе и удобству, и, что бы ни влияло на отдельного человека, влияет на него и как на члена общества. Поэтому статистика более или менее включается в каждую отрасль науки и образует ту ее часть, которая непосредственно связывает ее с интересами человека.

Как и другие науки, наука статистики пытается из прочно установленных фактов вывести некоторые общие принципы, которые интересуют человечество и влияют на него. Она применяет те же инструменты сравнения, вычисления и дедукции, но ее особенность состоит в том, что она действует исключительно путем сбора и сравнения фактов и не допускает никаких размышлений (speculation); как и другие науки, она стремится к истине и продвигается *pari passu* вместе с ее развитием [параллельно с развитием …].

Статистик обычно предпочитает иметь дело с числами и таблицами, потому что они указывают факты, особенно когда их много, самым простым и ясным способом, равно как и потому, что он не удовлетворится выдачей заключений, которые могут быть оспорены, а предоставляет материал, который каждый может сам исследовать и подвергнуть сравнениям.

И всё же неверно полагать, что статистик отвергает все заключения, или что статистика состоит лишь из колонок чисел; просто требуется, чтобы все следствия выводились из добротно выверенных данных и допускали математическое доказательство.

История статистики в нашей стране займет лишь немного строк. Совсем недавно в Англии было всего несколько достаточно влиятельных трудов, охватывающих все отрасли этой науки. Среди ценных работ этого рода можно назвать Sinclair (1791), Eden (1797)[5], Colquhoun (1814). Впрочем, отдельные отрасли этой науки были умело рассмотрены другими авторами. И по существу возможно, что ни одна другая страна не в состоянии так хорошо и подробно описать прогресс ее благосостояния в течение последних полутора столетий, т. е. с начала Реформации, как Великобритания[6].

К концу XVII и началу XVIII в. Reynolds, Child и Петти опубликовали очень ценные сведения о торговле, мануфактурах, обращении [денег?] и финансах страны. Позднее Price, Arthur Young и Chalmers с серьезным знанием дела обсуждали проблемы населения. Янг оставил памятник своему таланту и трудолюбию различными публикациями о сельском хозяйстве, а сочинения Playfair о торговле ценятся высоко.

Можно упомянуть немало подобных трудов по отдельным отраслям статистики, но первым, охватившим все детали этой науки, была книга Синклера, см. выше. Сейчас готовится ее новое издание, которое представит сведения вплоть до самого недавнего времени.

В 1793 г. правительство учредило Управление по сельскому хозяйству, и до его роспуска, происшедшего через несколько лет после этого, оно собирало и публиковало полезные отчеты о состоянии сельского хозяйства в каждом графстве. Впрочем, мало что было сделано в практическом смысле и притом с исчерпывающим охватом вплоть до 1832 г., когда Лорд Auckland и Poulett Thomson, тогдашний глава Министерства торговли, учредили в нем статистическое бюро для сбора, упорядочения и публикации отчетов, относящихся к условиям и различным интересам[7] в Британской Империи. Выходившие ежегодно и передававшиеся парламенту тома отчетов слишком хорошо известны, и в данном случае не нуждаются в дальнейшем описании.

Летом 1833 г. в Британской ассоциации продвижения наук, во время ее конференции в Кембридже, была учреждена статистическая секция, и до конца того года появилось и Манчестерское статистическое общество. Лондонское статистическое общество, задуманное в Кембридже, было учреждено весной 1834 г., и с тех пор изучение статистической науки очень быстро распространилось. По всему королевству сразу же возникли общества, производящие статистические исследования, и появилось много важных публикаций, целиком посвященных статистическому описанию условий и ресурсов нашей страны. Не умаляя заслуг других трудов, можно упомянуть статистические отчеты о части Ирландии, написанные работниками Ирландского картографического управления, а также сочинения MacCulloch (1832; 1837), MacGregor (1835) и Porter (1836). Ценные отчеты о состоянии образования в городах Манчестере, Солфорде, Bury, Ливерпуле и Йорке, подготовленные и опубликованные Манчестерским статистическим обществом, заслуживают особого упоминания среди самых важных недавних публикаций в этой области статистической науки. За последние десять лет были проведены многочисленные парламентские расследования о состоянии населения, сельского хозяйства и торговли в нашей стране. Они важны как свидетельства признания законодательной властью необходимости статистических результатов для правильного представления о принципах, которые должны направлять работу правительства. Результаты этих расследований составляют свод статистических материалов, которые ни одна другая страна не превзошла по широте и значимости.

И таким образом этот журнал учреждается с целью поощрять возрастающий вкус к статистике, объединять усилия существующих и способствовать появлению новых обществ, равно как и для того, чтобы предоставить отдельным авторам возможность общения на статистические темы. Журнал будет содержать отчеты о работе Общества и тех обществ нашей страны, с которыми оно переписывается; сообщения об их собраниях; копии или резюме материалов, прочитанных на них; сообщения на статистические темы; вопросы и формы таблиц для выполнения оригинальных исследований; копии или резюме парламентских отчетов и материалов, относящихся к статистике; рецензии на новые статистические сочинения и списки этих сочинений; полезные таблицы и иные материалы, которые так или иначе способствуют целям публикаций.

Примечания

1. По всей статье слово *статистика* употреблено во множественном числе. О. Ш.

2. Это совсем непонятно. О. Ш.

3. Была ли, к примеру, египетская кампания Наполеона (1798 – 1801) направлена против охотников, рыбаков, мародеров и пастухов? И вообще, зачем нужна была эта чужеродная вставка? О. Ш.

4. Метеорология того времени не имела и не могла иметь подобных целей. О значении астрономии сказано весьма смутно О. Ш.

5. Напрасно не упомянуто сочинение Eden (1800). О. Ш.

6. Трудно говорить о каком бы то ни было благосостоянии общества при самых отвратительных (диккенсовых, как говорят англичане) условиях жизни большинства населения и ужасающей смертности. См. Шейнин (1982, § 5.1), где, в частности, указано (Chadwick 1842), что в то время в Ливерпуле только 2/3 детей из семей *среднего класса* доживало до пятилетнего возраста. О. Ш.

7. Английское слово *interests* имеет несколько значений, в том числе польза, значение, влияние. О. Ш.

Библиография

Дружинин Н. К. (1963), *Хрестоматия по истории русской статистики.* М.

Chadwick E. (1842), *Report on the Sanitary Condition of the Labouring Population.* Edinburgh, 1965. [London, 1997.]

Colquhoun P. (1814), *Treatise on the Wealth, Power and Resources of the British Empire.* London.

Eden F. M. (1797), *State of the Poor*, vols 1 – 3. London, 1966.

--- (1800), *Estimate of the Number of Inhabitants in Great Britain and Ireland*. London.

MacCulloch J. R. (1832), *Dictionary, Practical, Theoretical and Historical of Commerce and Commercial Navigation.* London, 1880.
--- (1837), *Statistical Account of the British Empire*. London.
MacGregor J. (1835), *Resources and Statistics of Nations.* London.
Porter G. R. (1836), *Progress of the Nation*. London, 1851.
Sheynin O. B., Шейнин О. Б. (1982), On the history of medical statistics. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 26, pp. 241 – 286.
1986), Quetelet as a statistician. Ibidem, vol. 36, pp. 281 – 325. Перевод в книге автора *Статьи по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин, 2007, с. 173 – 217. Книга также в www.sheynin.de
Sinclair J. (1791), *Specimen of the Statistical Account of Scotland*. Edinburgh.

XII

У. Краскл

Распределение Гельмерта

W. Kruskal, Helmert's distribution
Amer. Math. Monthly, vol. 53, 1946, pp. 435 – 438

1. Цель заметки. Совместное распределение выборочного среднего и выборочного стандартного отклонения для выборок независимых случайных наблюдений из нормальной совокупности можно назвать *распределением Гельмерта*; впрочем, этот термин иногда применяют просто к распределению выборочного стандартного отклонения. Нашей целью является вывод этого распределения непосредственно при помощи индукции.

2. Фон. Распределение Гельмерта имеет первостепенное значение в теории выборок из нормальной совокупности, потому что из него следуют

1) Статистическая независимость выборочного среднего и выборочного стандартного отклонения.

2) Два отдельных распределения этих же оценок.

3) *t*-распределение Стьюдента.

Гельмерт видимо впервые фактически установил это распределение в [1]; свой вывод он привел и быть может в более доступном источнике [2, с. 151 – 163]. Он указал пару линейных преобразований, которые перевели совместное распределение отдельных ошибок наблюдения в совместное распределение выборочной средней квадратической ошибки и выборочного стандартного отклонения; появившиеся константы, записанные в виде переменных, могли быть исключены интегрированием по всем возможным значениям.

Распределение Гельмерта может быть также получено геометрически, привлекая геометрию гиперпространства [3; 4, с. 129 – 133]. Третий метод вывода включает предварительное установление при надлежащих ограничениях теоремы о независимости хи-квадрат распределений квадратичных форм, см.

[5, с. 105 – 110; с. 225 и след. в переводе]. В этом источнике вначале доказана теорема Кочрена, затем показано, что ее непосредственным следствием является распределение Гельмерта [которое автор не упоминает].

С педагогической и общей методологической точки зрения представляется интересным, что распределение Гельмерта можно просто и непосредственно установить по индукции. Сам Гельмерт [6] применил индуктивный метод для вывода несколько более простого распределения, но вряд ли достаточно известно, что и то совместное распределение, которое мы рассматриваем, также может быть выведено этим путем.

3. Обозначения. Они будут аналогичны использованным в [3]. Мы предположим, что n независимых случайных измерений x_i извлечены из нормальной совокупности со средним μ и стандартным отклонением σ.

Выборочное среднее $\bar{x} = \sum x_i \div n$

Его погрешность $u = \bar{x} - \mu$

Погрешность отдельного наблюдения $\varepsilon_i = x_i - \mu$

Квадрат выборочного стандартного отклонения (выборочная дисперсия)

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}[\sum \varepsilon_i^2 - nu^2].$$

4. Формулирование распределения Гельмерта. Его элемент (включающий соответствующие дифференциалы)

$$K_1 s^{n-2} \exp\,[-\frac{n}{2\sigma^2}(s^2 + u^2)]duds,\ K_1 = \frac{n^{n/2}}{2^{(n-2)/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})\sigma^n}. \quad (1)$$

Иначе говоря, вероятность того, что u и s одновременно окажутся в заданных пределах будет равна двойному интегралу, взятому в этих пределах от (1).

5. Доказательство. Пусть (1) действительно является элементом вероятностного распределения для выборки объема n. Увеличим ее на единицу привлечением нового независимого наблюдения (n + 1) из генеральной нормальной совокупности. Соответствующее ε_{n+1} будет, разумеется, распределено нормально с нулевым средним и стандартным отклонением σ. И таким образом совместное распределение u, s и ε_{n+1} окажется равным

$$\frac{K_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} s^{n-2} \exp\,[-\frac{n}{2\sigma^2}(s^2 + u^2 + \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{n})]dudsd\varepsilon_{n+1}. \quad (2)$$

Пусть $\bar{u}$ и $\bar{s}$ будут соответственно погрешностью новых выборочного среднего и выборочного стандартного отклонения. Схема вывода будет такой:

1) Выражение $\bar{u}$ и $\bar{s}$ в функции u, s и ε_{n+1}.

2) Преобразование элемента распределения (2) в элемент распределения для $\bar{u}$, $\bar{s}$ и ε_{n+1}.

3) Интегрирование полученного преобразованного элемента по всем возможным значениям ε_{n+1}.

Элемент распределения, полученный для $\bar{u}$ и $\bar{s}$, будет иметь ту же форму, что и (1), но вместо n окажется $(n + 1)$. Наконец, распределение Гельмерта будет установлено для специального случая $n = 2$. Соответствующие соотношения между пятью переменными u, s, $\bar{u}$, $\bar{s}$ и ε_{n+1} может быть легко получено из их определения:

$$u = (1/n)[(n + 1)\bar{u} - \varepsilon_{n+1}],\ s^2 = [(n + 1)/n^2][n\bar{s}^2 - (\bar{u} - \varepsilon_{n+1})^2],$$

$$\bar{u} = [1/(n + 1)][nu + \varepsilon_{n+1}],\ \bar{s}^2 = [n/(n + 1)^2][(n + 1)s^2 + (u - \varepsilon_{n+1})^2],$$

$$n(s^2 + u^2 + \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{n}) = (n + 1)(\bar{s}^2 + \bar{u}^2).$$

Индекс величины ε_{n+1} мы больше не будем указывать. Якобиан указанного выше преобразования равен

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial s}{\partial \bar{s}} = \frac{(n+1)^{3/2}}{n}\bar{s}[n\bar{s}^2 - (\bar{u} - \varepsilon)^2]^{-1/2}$$

и потому элемент совместного распределения $\bar{u}$, $\bar{s}$ и ε окажется равным

$$K_2\bar{s}[n\bar{s}^2 - (\bar{u} - \varepsilon)^2]^{(n-3)/2}\exp[-\frac{n+1}{2\sigma^2}(\bar{s}^2 + \bar{u}^2)]d\bar{u}d\bar{s}d\varepsilon,$$

$$K_2 = \frac{K_1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n^{n-1}}.$$

Теперь нам следует проинтегрировать его по всем (действительным) значениям ε. Но $s^2 \geq 0$ и ε ограничено неравенством

$$\varepsilon^2 - 2\bar{u}\varepsilon - n\bar{s}^2 + \bar{u}^2 \leq 0.$$

Оно удовлетворяется при значениях ε, лежащих между $\bar{u} - \bar{s}\sqrt{n}$ и $\bar{u} + \bar{s}\sqrt{n}$, притом только при них, а потому

$$\int[n\bar{s}^2 - (\bar{u} - \varepsilon)^{2(n-3)/2}d\varepsilon = 2n^{(n-2)/2}\bar{s}^{(n-2)}\int_0^1(1 - y^2)^{(n-3)/2}dy,$$

где пределами интеграла в левой части являются соответствующие пределы, указанные выше, и при переходе к y положено $\varepsilon = \bar{u} - \bar{s}y\sqrt{n}$.

Пусть теперь $y = \sin\theta$, тогда интеграл окажется равным

$$2n^{(n-2)/2}\bar{s}^{n-2}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}\theta d\theta.$$

Это – хорошо известный частный случай полной бета-функции, см. [7, формула 483; ср. Корн и Корн (1961/1968, с. 638)]. Интеграл равен

$$n^{(n-2)/2}\bar{s}^{n-2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)}.$$

И окончательно мы получаем выражение (1) с заменой n на $(n + 1)$.

Остается доказать, что распределение Гельмерта имеет место при $n = 2$. В этом случае элемент совместного распределения ε_1 и ε_2 оказывается равным

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp[-\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2\sigma^2}]\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2.$$

Совершим преобразование

$$\varepsilon_1 = u + l,\ \varepsilon_2 = u - l,\ u = (1/2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),\ l = (1/2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

где u – выборочная средняя квадратическая ошибка, а l – переменная, абсолютное значение которой является выборочным стандартным отклонением. Абсолютное значение якобиана равно двум,

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 = 2u^2 + 2l^2$$

и потому элемент совместного распределения u и l оказывается равным

$$\frac{1}{\pi\sigma^2}\exp[-\frac{u^2+l^2}{\sigma^2}]\, dudl.$$

И поскольку выборочное стандартное отклонение s является абсолютным значением l, элемент совместного распределения u и s равен

$$\frac{2}{\pi\sigma^2}\exp[-\frac{u^2+s^2}{\sigma^2}]\, duds,$$

что совпадает с выражением (1), если принять в нем $n = 2$.

Библиография

1. Helmert F. R. (1876), Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit. *Astron. Nachr.*, Bd. 88, No. 2096, колонки 113 – 132.
2. Czuber E. (1891), *Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig.
3. Deming W. E., Birge R. T. (1934), On the statistical theory of errors. *Reviews of Modern Physics*, vol. 6, pp. 119 – 161.
4. Kenney J. F. (1939), *Mathematics of Statistics*, pt. 2. New York.
5. Уилкс С. (1943, англ.), *Математическая статистика*. М., 1967.
6. Helmert F. R. (1876), Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. *Z. f. Math. u. Phys.*, Bd. 21, pp. 192 – 218.
7. Pierce B. O. (1929), *A Short Table of Integrals*. Boston.
8. Корн Г., Корн Т. (1961, англ.), *Справочник по математике*. М., 1968.

XIII

Т. Жерарди
Начало геодезической деятельности Гаусса

T. Gerardy, Die Anfänge von Gauss' geodätischer Tätigkeit
Z. für Vermessungswesen, Bd. 102, 1977, pp. 1 – 20

От переводчика

Тема предлагаемой статьи безусловно интересна, но автор неудачно описал ее. Во-первых, некоторые места плохо понятны, см. наши примечания 4, 6 (и 7). Во-вторых, и это самое главное, он уделил много внимания вычислению засечек, но не смог толково рассказать о применении Гауссом метода наименьших квадратов, что и указано в Прим. 7. Есть много косвенных указаний на то, что Гаусс применял этот метод до появления публикации Лежандра 1805 г., не говоря уже о четких заявлениях его самого, и опровергнуть этот вывод невозможно, и всё-таки некоторые современные авторы это отрицают; обо всём этом см. Шейнин (1999).

Ясное и недвусмысленное пояснение Жерарди было бы исключительно ценно, фактически же он сказал, что Гаусс решил нормальные уравнения косвенно, методом последовательных приближений, не составляя их. По смыслу: решил свои исходные уравнения по принципу наименьших квадратов, хоть и без составления нормальных уравнений. Окончательной ясности, однако, нет. Добавим только, что подобное решение действительно возможно, см., например, Wolf (1959; 1968, с. 183 – 184), и трудно представить себе, что Гаусс не смог бы додуматься до него.

Галле (1924) должен был признать, что “мы мало что знаем о начале практической деятельности Гаусса [в геодезии]” и главным образом основал свою статью на сведениях из его переписки с Ольберсом (1900 – 1909). Пересмотр очень богатого наследия Гаусса и его систематизация вместе с публикацией результатов в виде нового каталога заняли более 20 лет. В течение этого времени я наткнулся на ряд отрывков ранних геодезических работ Гаусса[1], что позволило мне осветить этот период. Оказалось, что юный Гаусс и тогда искал и находил новые пути, и стало понятным, как к началу работ по градусным измерениям в 1821 г. он смог сразу же приступить к ним с ясным представлением об их сути.

В сентябре 1798 г., после трех лет обучения в Гёттингене, Гаусс вернулся в Брауншвейг[2] и тотчас занялся изданием своих *Disquisitiones arithmeticae*, которое затянулось до 1801 г. и тут же выдвинуло его в ранг ведущих математиков мира. Стало бы всего понятней, постарайся теперь Гаусс, этот молодой неприкаянный ученый, живший на *пособие* герцога Карла Вильгельма Фердинанда Брауншвейгского, что избавляло его от самых насущных забот, получить кафедру математики. Но не к этому стремился Гаусс, см. его письмо Ольберсу 26 окт. 1892 г. (1976, с. 105 – 106):

Я с самого начала чувствовал истинное отвращение к преподаванию. Ведь непрестанное занятие профессора математики состоит по существу лишь в преподавании основ своей науки. Из небольшого числа студентов, которые делают шаг вперед, и обычно продолжают, – оставаясь в рамках метафоры, – свое беспорядочное чтение, большинство оказывается недоучками. Редкостные задатки развиваются не лекциями, а сами по себе. И на этой неблагодарной работе профессор теряет свое драгоценное время.

Намного сильнее было желание Гаусса обратиться к астрономии, и поэтому он постарался приобрести необходимый навык в практической астрономии. В область деятельности астрономов того времени входила и топографическая съемка, и измерение Земли.

О геодезических измерениях мы узнаем из письма 1801 г. тайного государственного советника фон Циммермана[3] (Sartorius von Waltershausen 1856, с. 28) фон Цаху, астроному в Готе:

К тому же, Вы будете рады узнать, что, кроме прочего, Доктор Гаусс – это весьма благородно мыслящий и притом бескорыстнейший молодой человек (ему всего 24 года). Когда я сообщил ему, что наш превосходный герцог по своей доброй воле предоставил ему пособие в 400 рейхсталеров, он сказал: “Но ведь я же ничего не заслужил, я еще ничего для Бранденбурга не сделал”. И именно поэтому он захотел на свои деньги купить зеркальный секстант для определения координат мест.

Ни точная дата письма, ни место его хранения не известны.

Первое измерение этим секстантом [секстантом этого типа] произошло 28 июня 1802 г. (Cod Ms Gauss Geod 1, Bl. 8 recto [лист 8]), см. Рис. 1 [некоторые рисунки не воспроизведены], но подробности мы узнаем лишь из письма Гаусса Ольберсу 8 апреля 1803 г.(1976, с. 145 – 146):

В эти дни при наступившей в Брауншвейге ясной погоде я неоднократно измерял углы своим секстантом (друг Цах отдал мне его насовсем), и я уже отнаблюдал большое число пунктов. Сам удивляюсь достигнутой при этом точности, хоть у меня и нет прибора для измерения высот [превышений], *и я поэтому не редуцирую свои углы к горизонту, а возле многих моих пунктов нет местных предметов, на которые я мог бы визировать повторно*[4]. *Я намереваюсь когда-нибудь покрыть весь Бранденбург сетью триангуляции, для которой мои нынешние измерения окажутся лишь предварительным упражнением. Хоть Брауншвейг был давно уже измерен покойным майором Герлахом с достаточной точностью для его до сих пор еще не выгравированной карты, можно заключить, что он пользовался лишь обычной астролябией и мерной цепью, либо, как некоторые говорят, даже не ими, а только мензулой и измерял расстояния шагами. Привязка его топографии к достаточному* *числу тригонометрических пунктов должна будет послужить для составления хорошей карты*.

Карта Герлаха, оригинал которой хранится в государственном архиве в Вольфенбюттеле, и репродукция которой тем временем появилась в книготорговле, изготовлена на шести листах большого формата в масштабе 1:42 000. Лишь небольшая ее часть основана на съемках самого Герлаха, остальное же соответствует листам съемки 1745 – 1784 гг. (Grossmann 1955, с. 24 и 39; Kost 1955, с. 120 и след.).

Следует указать, что доброе намерение Гаусса усовершенствовать карту Герлаха, вставив ее в геодезические рамки, не осуществилось, возможно потому, что в 1807 г. он последовал приглашению на астрономическую обсерваторию в Гёттингене.

Вторая подобная попытка также не удалась, потому что триангуляция Бранденбурга, которую начал было в 1829 г. профессор Шпер при участии Гаусса, прервалась в 1833 г. ввиду ранней смерти первого[5].

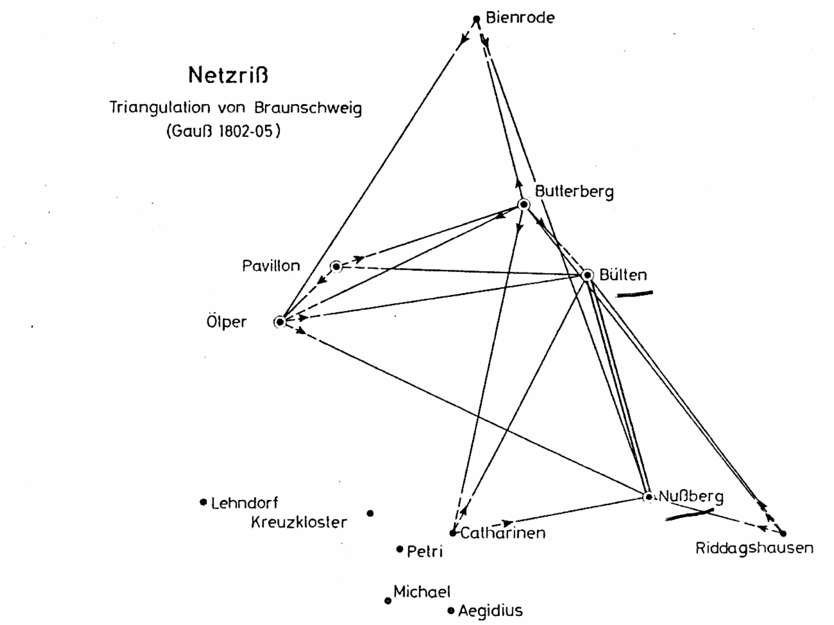
Первую серию наблюдений, которую Гаусс начал 28 июня 1802 г., ему пришлось прервать 20 июля 1803 г., ибо с начала августа он начал долготные определения в г. Брауншвейге, в Köppens Garten, и в Хельмштедте на пороховые вспышки, которые фон Цах посылал из Броккена. Затем он на 4 месяца последовал за фон Цахом в Зееберг возле Готы, чтобы получить от того наставления по практической астрономии и принять участие в измерении Зеебергского базиса.

Вторая серия угловых измерений началась 10 апреля 1804 г. и затянулась до 1807 г. Тем временем, в 1803 – 1805 гг., французский инженер-капитан Эпейли проложил триангуляцию королевства Ганноверского. Гаусс явно принимал участие в его угловых измерениях на брауншвейгской башне Andreasturm, потому что 2 июля 1805 г. он написал Ольберсу (1976, с. 265):

Вот уже 14 дней Эпейли из Ганновера находится здесь, чтобы измерять углы прибором Ленуара на нашей Andreasturm. Я подивился грубости деления[круга] *его прибора и хотел бы иметь прибор Траутона*.

На каждом пункте Гаусс очевидно астрономически ориентировал свои углы, потому что после установки нульпункта он каждый раз определял азимуты по осредненным значениям многих измеренных направлений[6]. Позднее, после 1805 г., его вычисления свидетельствуют, что он производил уравнивание на станциях и со временем начал вводить поправки в измеренные азимуты по сравнению их с вычисленными.

Эскиз части сети триангуляции Брауншвейга
(Гаусс, 1802 – 1805)



К первому периоду угловых измерений относятся и определение некоторого числа пунктов засечками с Nußberg и Bülten (Cod Ms Gauss Geod 1Bl. 13 recto), см. Рис. 2 (фотокопия вычислений прямых засечек). Как именно Гаусс вычислил координаты этих исходных пунктов, остается неизвестным. Они, совместно с началом координат, вероятно оказались исходным треугольником [терминология необычна], масштаб которого, как можно полагать, был установлен по какому-либо небольшому базису. Достигнутая точность триангуляции свидетельствует о сравнительно точном линейном измерении.

Из пунктов, определенных засечками, два являются и точками стояния, – Oelper и Pavillon. Сравнение азимутов, измеренных с них и вычисленных по координатам, выявляет для Oelper расхождения в 150 – 200″. Гаусс осознавал, что частично они могли быть обусловлены неточностью координат Oelper, и пытался уменьшить их, изменяя эти координаты. После двукратной попытки расхождения оказались порядка 50″, чем Гаусс остался на время доволен. Но ясно, что подобные методы не смогли бы надолго удовлетворить математика его ранга, и мы вскоре увидим, что он отыскал другой путь, чтобы управиться с невязками без произвола. Но прежде всего Гаусс вычислил ряд новых засечек, а затем добавил и обратную засечку пункта Butterberg из Oelper, Bienrode и Bülten (Cod Ms Gauss Geod 1 Bl. 14 verso [лист 14 об]), см. Рис. 4. Полученные при этом координаты Butterberg показались явно неверными, и Гаусс вычислил их заново, исходя из Oelper, Catharinenkirche и Riddagshausen.

Проверка вычислений прямых засечек была несложной, но было очень трудно понять гауссов метод вычисления обратных засечек. Это, однако, удалось мне после прилежных пробных попыток и применения логарифмов, а также учета указаний, содержащихся в его работе. В своей диссертации Вернер Бокк (1956), см. Рис. 4, 5 и 6, исследовал почти необозримое число предложений о вычислении обратной засечки и определил, что они подразделяются лишь на 4 группы независимых путей с ограниченным числом вычислительных вариантов. И по терминологии Бокка решение Гаусса относится к группе вспомогательного треугольника Кассини с применением формулы котангенсов, – к R 3 IIb. Тот же вариант вычислений описан, кстати, в Прусском техническом наставлении 1870 г., а сам Гаусс (1822) впоследствии привел свою схему к более удобной форме для применения логарифмических вычислений.

Явно для контроля своих вычислений координат Butterberg Гаусс начал было дополнительно определять их по Oelper, Bülten и Riddagshausen, однако прервал эту работу тут же после записи исходных углов B и ß. Мы также остановимся здесь на короткое время, потому что тут в геодезии началась новая эпоха, – внедрение в вычисления метода наименьших квадратов [МНКв.]

Гаусс изобрел МНКв в 1794 [или 1795] г. в возрасте 17 лет. Он, однако, полагал, что лишь переоткрыл нечто давно известное. Хоть он начал "часто" применять этот метод "лишь в 1802 г. и с тех пор применя[ет] его, можно сказать, ежедневно в астрономических вычислениях" [письмо Лапласу 1812 г., *Werke*, Bd. 10/1, 1917, с. 373 – 374], но сообщил о нем в печати лишь в 1809 г. [в § 186; применял с 1795 г.].Тем временем его опередили Лежандр (1806 г.) и Эдрейн (1808 г.), но приоритет бесспорно принадлежит Гауссу[7].

[Далее автор кратко разъясняет уравнивание косвенных наблюдений по МНКв и подробно прослеживает, как именно Гаусс вычислял засечки. Мы лишь укажем более важные моменты.

1. Гаусс вводил пробные искажения в некоторые приближенно известные величины (см. выше).

2. Для упрощения вычислений он "не переходил (stellt nicht auf) к нормальным уравнениям, а применял приближенный метод их [?] косвенного решения.]

Необычным оказалось большое число вычислительных ошибок [перечислены 6]. Гаусс был исключительно искусным и проворным вычислителем, перенявшим многие прежние и вводившим найденные им самим приемы. Беспрестанные вычисления, которыми он занимался с самых ранних лет, позволили ему получить многие результаты простым рассмотрением получаемых чисел. Он сам об этом писал так (письмо Шумахеру 6 янв. 1842 г., 1975, с. 49 второй пагинации):

Произведения вида 13 х *29 = 377, 19* х *53 = 1007 и т. п. я усматриваю непосредственно, без усилий, а относительно других, которые можно вывести из первых, размышления столь недолги, что я их почти не чувствую.*

Об этом же сообщили Галле (1918) и Меннхен (1918), а последний также установил, что Гаусс почти никогда не проверял себя и что очень много вычислительных ошибок оказалось прежде всего в его позднейших геодезических работах. Главную причину этого он усмотрел в том, что Гаусс вычислял необычайно быстро. Тем не менее, приблизительные подсчеты и [целесообразное] размещение вычислений в большой степени предохраняли его от грубых ошибок […].

На протяжении года Гаусс вычислил плоские координаты примерно ста пунктов от Бетмара на западе до Эльма на востоке, от Wendhausen на севере до Вольфенбюттеля на юге. Их особенно много в г. Брауншвейге, и среди них были деревья, артезианские колодцы, отдельные дома. Ось x его системы координат была направлена на запад, а ось y – на юг. Поскольку его триангуляция включила в себя многие колокольни, которые ныне входят в бранденбургскую триангуляцию, напрашивалась мысль наложить их друг на друга при помощи преобразования Гельмерта.

Для этого координаты сети Гаусса, масштаб которой явно не был выражен в метрах, следовало прежде всего привести к системе новой триангуляции и затем по величинам разностей соответствующих координат определить, какие пункты обеих систем совпадают. Но каждый раз, когда совпадения нельзя было доказать наверняка, становилось неясно, где провести границу допустимых расхождений. Чем больше пунктов включить в преобразование Гельмерта, тем значительнее окажутся эти расхождения и тем ниже точность сети Гаусса. Такие преобразования проделали в Геодезическом институте Технического университета Ганновера и при 25 возможно совпадающих пунктах среднее [квадратическое?] расхождение оказалось равным 8.6*м* и снизилось до 5.9*м* при 22 пунктах и далее до 1.5 и 0.6*м* при 16 и 11 пунктах.

При 16 пунктах намного большее число вершин сети оказалось в черте г. Брауншвейг, а при 11 пунктах все они оказались либо там, либо в ближайших окрестностях города. Это показывает, что неточность сети Гаусса возрастает с удалением от него. При 22 пунктах наибольшее расхождение составило примерно 10*м*, а при 16 пунктах – около 3*м*. И этими границами следует оценивать точность сети в городе и его окрестностях.

Расхождения вызваны, во-первых, малой точностью примененных приборов, затем неуклюжей [негодной] схемой сети и построением триангуляции из центра вовне. И всё-таки для поставленной цели, а именно, для предоставления основы карты масштаба 1:42 000, точность была достаточна[8].

Как показали преобразования Гельмерта, начало координат у Гаусса находилось на участке Гауссштрассе 32, в саду, который был там в то время. Примерно в трехстах метрах западнее был определен пункт Gartenhaus, который по своим координатам попадает в вестибюль Технического университета. И можно сказать, что этот университет был воздвигнут на священной геодезической земле. Неясно, по какой причине улица была названа Гауссштрассе и также неизвестно, кому принадлежал сад, с которого взяла начало триангуляция Гаусса. Единица длины в ней составляла 0.626*м*, т. е. совпадала с рейнским локтем (0.628*м*).

С 1805 г. Гаусс применял другую систему координат с началом Andreaskirche и единицей длины 1.88*м*, равной половине рейнской руты. Поводом к этой перемене несомненно послужили наблюдения Эпейли на Andreasturm в 1805 г., о которых уже была речь. Гаусс, видимо, присоединил свою триангуляцию к более точным измерениям Эпейли, копия которых имеется в его рукописях. Там же находится и новое вычисление 36 пунктов в туазах (1.93*м*) и каталог координат, который быть может относится к присоединению этой триангуляции к сети Мюффлинга в Тюрингии. Об этом Гаусс написал Ольберсу примерно 22-го февраля 1804 г. (1976, с. 177 – 178):

Лейтенант Мюффлинг и оба его помощника предварительно объездили всю Тюрингию и в очень многих точках измерили теодолитом углы между всеми видимыми колокольнями и т. п. Бóльшую часть этих измерений я вычислил для своего удовольствия и при помощи секстанта примкнул прежде измеренную часть базиса к этим треугольникам. Тем самым большое число мест от Броккена до Франконии [историческая область Германии] *определена с точностью, достаточной для картографии.*

Брауншвейгская триангуляция оказалась существенной для Гаусса и в другом смысле. На одном листе [соответствующего полевого журнала] много раз встречается имя Иоганны (Жанетты) Остхоф (Cod Ms Gauss Geod 3 Bl. 1recto), которую Гаусс впервые увидел 27 июля 1803 г. (письмо Гаусса Больяи 25 ноября 1804 (1987, с. 79 – 83). Их первое знакомство продлилось всего несколько недель, потому что Гаусс, как уже было сказано. уехал в Готу к Барону фон Цаху. В апреле 1804 г. Гаусс возобновил это знакомство, которое привело к обручению в ноябре того же года. И кроме того, что Гаусс в начале августа 1803 г. наблюдал на пункте Köppens Garten подаваемые фон Цахом пороховые вспышки (и что приготовления к этому начались, возможно, уже в конце июля), а в апреле 1804 г. закончил наблюдения на пункте Köppens Insel, следует еще указать, что лучшей подругой Иоганны Остхоф была Доротея Кёппе (Köppe), так что с вероятностью, граничащей с уверенностью, можно полагать, что во время своих первых триангуляционных работ Гаусс не только приобрел новые знания в области геодезии, но и обзавелся женой.

Примечания

1. Это наследие находится в отделе рукописей библиотеки Гёттингенского университета (Cod Ms Gauss Geod 1 – 4, а кое-что в Handbuch 5, с. 218).

2. Здесь – г. Брауншвейг. Ниже упоминается и одноименное герцогство. О. Ш.

3. Циммерман был профессором в Collegium Carolinum, в котором Гаусс обучался до поступления в Гёттингенский университет, преподавал там несколько дисциплин и в том числе математику. О. Ш.

4. На какие же местные предметы можно было наблюдать только один раз? И что означает *визировать повторно*? О. Ш.

5. Материалы триангуляции Шпера находятся в государственном архиве в Вольфенбюттеле (L Neu Abt. 24, NNo. 20, 21) и там же хранится несколько писем Гаусса Шперу. См. также Osten (1868, с. 20) и [Spehr], 1868, с. 33.

6. Нульпункт лимба? Вот плохо понятный немецкий текст:

Gauss hat seine Winkel […] *auf jedem Standpunkt astronomisch orientiert, denn er bildet jedesmal nach Anbringung der Indexverbesserung sogleich die Azimute unter Mittelung mehrfach beobachteter Richtungen.* О. Ш.

7. Известно, что мемуар Эдрейна фактически вышел в 1809 г. и что в нем не было ничего похожего на строгий вывод, Лежандр же опубликовал свой мемуар еще в 1805 г. Ссылку на письмо Лапласу мы ввели сами, автор же указал другие и во всяком случае вторичные источники, в частности Lehmann (1955, с. 61). По поводу “ежедневных” вычислений он также добавляет (но не обосновывает), что “позднее достаточно доказательств этому было найдено в наследии Гаусса, но описываемое применение метода наименьших квадратов в 1803 г. также является тому доказательством”. К сожалению, автор так и не описал этого применения достаточно ясно. Он ссылается также на *Труды* Гаусса (т. 8, с. 136 и след.; т. 10, с. 373) и на Galle (1924).
И в то же время автор как-то неопределенно описывает другой главный момент: Гаусс не составляет нормальных уравнений, но решает их методом последовательных приближений, см. ниже немецкий текст. Автор также ссылается на воспоминания Дедекинда (1901), которые, однако, не могли относиться к описываемому периоду, и напрасно ссылается на статью Гаусса (1822). О. Ш.

Der bequemeren Rechnung halber stellt Gauss nicht die Normalgleichungen auf und löst diese mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus, sondern bedient sich einer approximativen Methode zur indirekten Auflösung der Normalgleichungen.

8. Вот сообщение заслуженного профессора, доктора-инженера Карла Герке (Брауншвейг, 26.10.1976):

После получения Вашей прежней рукописи о брауншвейгской триангуляции Гаусса и каталога координат 1805 г. Геодезический институт Брауншвейгского технического университета проделал следующие работы в качестве дальнейшего вклада в Ваши исследования.

<u>1. Вычисления.</u> На основании многолетнего опыта были установлены вероятно совпадающие пункты всей сети Гаусса. […]
И теперь можно полагать, что для пунктов, расположенных на внешней границе области, сеть не была, как внутри города, равноточной. И поэтому мы произвели третье преобразование Гельмерта с 10 совпадающими пунктами, и соответствующие погрешности оказались равными ± 0.5м и 1.5м. Таким образом, главное не в количестве пунктов, включаемых в преобразование, а в их действительном совпадении с нынешними и в очертаниях сети.

2. Наложения. Пункты сети Гаусса были затем наложены на карту Хейнемана 1825 г. или на ее репродукцию в масштабе 1: 30 000 [… и в конце концов] *на городскую карту масштаба 1:3000.* [Один из пунктов оказался в вестибюле главного здания университета.]

Библиография

C. F. Gauss, К. Ф. Гаусс

(1809, латин.), Теория движения и т. д. В книге автора (1957, с. 89 – 109).

(1822, нем.), Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии. Там же, с. 129 – 133.

(1899, 1900 – 1909, 1860 – 1865), Переписка с Больяи, Ольберсом и Шумахером. Цитированные письма Ольберсу были опубликованы в 1900 г., а письмо Шумахеру – в 1862 г. Переписка перепечатана в трудах автора *Werke, Ergänzungsreihe*, Bde 2, 4-1 и 5-2. Hildesheim, 1987, 1976, 1975.

(1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Другие авторы

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1999), The discovery of the principle of least squares. *Hist. Scientiarum*, vol. 8, pp. 249 – 264. Перевод в книге автора *Статьи по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин, 2007, с. 137 – 159. Также www.sheynin.de

Bock W. (1956), *Mathematische und geschichtliche Betrachtungen zum Einschneiden.* Hannover.

Dedekind R. (1901), Gauss in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate. В книге автора *Ges. math. Werke*, Bd. 2. Braunschweig, 1931, pp. 293 – 306.

Galle A. (1918), Gauss als Zahlenrechner. *Materialen für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss*, No. 4. Leipzig. Первоначальный вариант статьи 1924 г.

--- (1924), Über die geodätischen Arbeiten von Gauss. В книге Gauss, *Werke*, Bd. 11/2, No. 1. Berlin.

Grossmann W. (1955), Niedersächsische Vermessungsgeschichte im 18. und 19. Jahrhundert. В книге Niedersächs. Landesvermess. …(1955).

Kost W. (1955), Zur topographischen Kartographie im niedersächsischen Raum von 1764 bis 1863. В книге Niedersächs. Landesvermess. … (1955).

Lehmann G. (1955), Gauss' theoretische geodätische Arbeiten. В книге Niedersächs. Landesvermess. … (1955).

Maennchen Ph. (1918), Gauss als Zahlenrechner. В трудах Гаусса *Werke*, Bd. 10/2, No. 6, 1930.

[**Niedersächsisches Landesvermessungsamt**] (1955), *C. F. Gauss und die Landesvermessung in Niedersächsen.* Hannover.

Osten F. (1868), Beiträge zur mathematischen Geographie Braunschweigs. *Brandenburger Magazin*.

Sartorius von Waltershausen W. (1856), *Gauss zum Gedächtnis*. Wiesbaden, 1965.

[**Spehr F.**], Die von Professor Spehr im Jahre 1829 unternommene Triangulation des Herzogtums Braunschweig. *Brandenburger Magazin*.

Wolf H. (1959), Ausgleichung ohne Zuhilfnahme von Normalgleichungen. *Vermessungstechn. Rundschau*, Bd. 21, pp. 437 – 439.

--- (1968), *Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Hannover – München.

О. Де Морган

О теории ошибок наблюдений

A. De Morgan, On the theory of errors of observation
Trans. Cambr. Phil. Soc., vol. 10, 1864, pp. 409 – 427

В этой статье имеются многословные, притом ненужные рассуждения, и мы приводим лишь ее реферат. Предварительно укажем, что Де Морган – известнейший логик, кое-чего достигший и в теории вероятностей, см., например, Rice (2003). Некоторые подробности его творчества, однако, явно ускользнули от комментаторов, и о них мы сообщим ниже, см. также нашу статью (1995, с. 179).

Автор попытался обобщить нормальный закон, умножив экспоненциальную функцию отрицательного квадрата на четный многочлен

$$p + qx^2 + rx^4 + \ldots$$

Другим новшеством было определение появившихся при этом параметров по методу моментов, и в этом автор опередил Пирсона. Наконец, вслед за Лапласом и Бесселем и несколькими другими авторами он установил плотность распределения (для которой у него еще не было современного названия) суммы двух случайных величин. Других случайных функций он не рассматривал, но в отличие от своих предшественников очень четко сформулировал указанную задачу и столь же четко записал ее решение.

Весьма положительно можно оценить подмеченное Де Морганом появление нормального распределения у Муавра, не упомянутое чуть позже Тодхантером (1865) и замеченное на континенте Европы лишь в конце века. Автор, правда, сослался лишь на второе издание (1738 г.) *Учения о шансах*, тогда как следовало сказать и о 1733 г., когда нормальный закон появился у Муавра впервые.

Глейшер (1872, с. 90 – 91) заявил, что статья Де Моргана была "возможно наиболее важным вкладом в теорию среднего арифметического", – очевидно, после Лапласа и Пуассона. Но заслугу автора Глейшер усмотрел лишь в утверждении, что среднее арифметическое является также средним из всех возможных предположений. Добавим: именно в этой "теории" Де Морган ошибся, полагая (с. 417), что при незнании плотности распределения среднее арифметическое является вероятнейшим результатом.

Во-первых, Гаусс отказался от вероятнейших оценок в пользу надежнейших, – обладающих наименьшей дисперсией. Во-вторых, при незнании безопаснее всего медиана. Этого, положим, Де Морган не знал, но вот его же разумное утверждение (с. 411):

В теории вероятностей, как и в жизни, открывая наш дом незнакомцам, положившись на их приятный вид и правдоподобные истории, мы наверняка будем в конце концов обмануты.

Де Морган явно ошибся при решении приведенной им задачи: Белые и черные бобы, ни соотношения которых, ни их общего числа не дано, извлекаются наудачу и без возвращения из мешка. Из 20 вынутых бобов 13 оказалось белыми, какова вероятность, что белым будет следующий извлеченный боб? Непонятный ответ, без обоснования: 14/22.

Но основная неприятность ожидает читателя при чтении попытки автора обобщить нормальный закон, принять его в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{c/\pi}\, \exp(-cx^2)\, [p + qx^2 + rx^4 + \ldots].$$

Не отказываясь от обозначения c, он, правда, ввел и $h = 1/2c$.

Обозначим четные моменты нормального распределения через A_{2k}, $A_0 = 1$. Их вычислил уже Гаусс (1816, § 5), но более простую формулу вывела, например, Вентцель (1969, с. 120 – 121):

$$A_{2k} = 1{\cdot}3{\cdot}5 \ldots (2k-1)\sigma^{2k};$$

здесь σ^2 – дисперсия.

В первом приближении Де Морган получил

$$p = 1 \text{ и } A_2 = 1/2c \text{ или } c = 1/2A_2 \text{ (и } A_2 = \sigma^2).$$

Во втором приближении оказалось, что

$$p + qh = 1,\ p + 3qh = A_2/h,\ 3p + 15qh = A_4/h^2, \qquad (1.1,\ 1.2,\ 1.3)$$

откуда

$$p = \frac{3h - A_2}{2h},\ q = \frac{A_2 - h}{2h^2}.$$

Подставляя эти величины в (1.3), можно получить уравнение

$$3h^2 - 6A_2h + A_4 = 0,$$

из которого следует, что действительным значениям h соответствует условие

$$3A_2^2 - A_4 \geq 0, \qquad (1.4)$$

что равносильно выражению

$$\varepsilon = (A_4/\sigma^4) - 3 \leq 0,$$

где ε – эксцесс, введенный Пирсоном в 1894 г. и равный нулю при нормальном распределении.

Де Морган ошибочно заявил, что левая часть неравенства (1.4) не может быть отрицательной, потому что крупные ошибки встречаются реже, чем мелкие. Важно, однако, то, что они встречаются чаще, чем полагалось бы по нормальному закону.

Продолжая свое исследование, Де Морган заметил, что $q < 0$, т. е. что при больших по абсолютному значению аргументах плотность распределения оказывается отрицательной и удивительным образом заключил (с. 421), что соответствующее “количественное влияние слишком мало и не требует внимания”. Более того, там же, в подстрочном замечании, он продолжил:

Отрицательная вероятность несомненно может указывать на ставшими невозможными обстоятельства или на необходимость изменения данных, пока [они] *не станут возможными, но я еще не видел такой задачи, в которой стоило бы исследовать подобное истолкование. Однако, я натолкнулся на необходимость* *истолкования на другом конце шкалы, как, например, в задаче, в которой шанс события оказался равным* [по смыслу: вероятность оказалась равной] *2.5. Это означает, что при данном предположении событие должно произойти дважды с равным шансом наступить или не наступить в третий раз.*

Rice (2003, с. 303), кстати, указал, что в начале 1850-х годов Буль заметил в письме к Де Моргану, что предложенное тем решение какой-то задачи не имело смысла, потому что приводило к вероятности в 4/3.

Другое открытие Де Моргана мы обнаружили в его письме 1842 г. Джону Гершелю (Sophia De Morgan 1882, с. 147); ответа Гершеля, мы, к сожалению, не нашли. Цитируем:

Вот <u>*несомненные*</u> *истины*:

$\sin \infty = 0$, $\cos \infty = 0$, $\operatorname{tg} \infty = \mp\sqrt{-1}$, $\operatorname{ctg} \infty = \mp\sqrt{-1}$.

Но по поводу sec ∞ *и* cosec ∞ *я сомневаюсь, они равны либо 0, либо ∞; подозреваю, что нулю.*

Нужно ли комментировать? *Sapienti sat*, для умного достаточно.

Библиография

Вентцель Е. С. (1969), *Теория вероятностей*. М.

De Morgan Sophia Eliz. (1882), *Memoir of Augustus De Morgan.* London.

Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1816, нем.), Определение точности наблюдений. В книге автора *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М., 1957, с. 121 – 128.

Glaisher J. W. L. (1872), On the law of facility of errors of observations and on the method of least squares. *Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 39, pt. 2, pp. 75 – 124.

Rice A. (2003), ‘Everybody makes errors’: the intersection of De Morgan’s logic and probability. *Hist. & Phil. of Logic*, vol. 24, pp. 289 – 305.

Sheynin O. B. (1995), Density curves in the theory of errors. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 49, pp. 163 – 196.

XV

С. Ньюком

Обобщенная теория сочетания наблюдений для получения наилучшего результата

S. Newcomb
A generalized theory of the combination of observations
so as to obtain the best result
Amer. J. Math., vol. 8, 1886, pp. 343 – 366

От переводчика

В свое время предлагаемая статья была хорошо известна как серьезная попытка обобщить нормальный закон. По сути Ньюком предложил считать меру точности нормального закона дискретной случайной величиной, принимающей небольшое число значений с соответствующими вероятностями. Ее закон распределения, включая и число значений, оставался неизвестным и подлежал определению по субъективной оценке исследуемого ряда наблюдений. Он (п. 9) также заметил, что меру точности правильнее считать непрерывной случайной величиной, но что практически подобное усложнение не требуется. Тем не менее, последующие авторы (Леман-Филе в 1887 г. и К. Ф. Огородников в 1928 – 1929 гг.) ввели именно это предложение. Первый счел, что мера точности характеризовалась своим собственным нормальным законом, а второй решил, что подобного ограничения вводить не следует. О статье самого Ньюкома и указанных предложениях см. Шейнин (2007, пп. 6.5.4 – 6.5.6).

Мы сомневаемся в том, что рекомендации Ньюкома или его последователей получили какое-то распространение, но сам он был виртуозным вычислителем, и возможно, что он-то действительно смог воспользоваться своим трудом. Он ведь объединил и обработал невероятное количество наблюдений, выполненных на различных обсерваториях мира. В п. 9 Ньюком действительно описывает приложение своих рекомендаций к обработке наблюдений прохождений Меркурия по солнечному диску в период 1677 – 1881 гг. и ссылается на свою статью 1882 г. (по объему – брошюра).

Странно, что он ни словом не обмолвился о том, как повлияло на его исследование повышение точности наблюдений за этот громадный период. Мельком Ньюком упомянул и о соответствующих наблюдениях Венеры и не указал никакого различия между этими двумя случаями. Мы не знаем, существовало ли оно, но относительно Венеры еще в XVIII в. было известно (van Helden 1995, с. 161), что ее наблюдения не могли быть точными. Этот же автор (с. 165) сообщает, что в 1871 г. Ньюком руководил наблюдениями Венеры в США, а в 1891 и 1895 гг. опубликовал результаты ее последних наблюдений.

В статье Ньюкома немало интегралов. Воспользовавшись тем, что все они взяты в бесконечных пределах, мы выписывали их упрощенно, без указания последних.

1. Вводные замечания

Принятая практика сочетать наблюдения основана на предположении, что частота ошибок следует хорошо известному закону, который можно выразить так. Пусть Δ – величина, на которую результат наблюдения может отличаться от значения, полученного как среднее из бесконечного множества подобных наблюдений[1]. Она тогда окажется *ошибкой* наблюдения. Предполагается, что бесконечно малая вероятность, что ошибки содержатся в пределах Δ и $\Delta + d\Delta$, задается уравнением

$$dp = (h/\sqrt{\pi}) \exp(-h^2\Delta^2)d\Delta,$$

в котором h – *модуль точности*, зависящий от точности наблюдений, а e – основание натуральных логарифмов.

Этот модуль обычно заменяется вероятной ошибкой r, которая обозначает величину, превышающую столько же ошибок, взятых по абсолютной величине, сколько остальных ошибок превышает ее[2]. Значение r выражается через модуль h уравнением

$$r = \pm \frac{0.4769}{h}.$$

Если ошибки действительно следуют указанному закону, их число быстро убывает с возрастанием Δ [с возрастанием $|\Delta|$]. Так, лишь 1% ошибок окажется вне пределов $\pm 4r$.

На самом же деле случаи, когда ошибки действительно следуют этому закону, весьма исключительны и по общему правилу гораздо больше, чем 1% ошибок оказывается вне указанных пределов. Другими словами, мы почти всегда устанавливаем, что некоторые крупные ошибки представляются необычно большими, и один из самых трудных вопросов при обработке наблюдений всегда относился к методу их учета. Как правило, необычно ошибочные наблюдения при вычислении результатов отбрасываются.

Но здесь нас ожидают трудности, потому что нельзя установить никакого уверенного правила для того, чтобы решить, следует ли считать наблюдение необычным или нет. Несколько подобных попыток было, правда, сделано, и более всех из них известен критерий Пирса (1852)[3]. Однако, как мне всегда казалось, он подвержен двум серьезным возражениям. Во-первых, он никак не учитывает возможно наперед известной вероятной ошибки наблюдения; напротив, критерий предполагает, что ее значение может быть получено по внутренней сходимости наблюдений. Отсюда немедленно следует, что критерий отвергнет те же самые наблюдения, если даже все ошибки будут вначале умножены на одно и то же число, сколь угодно большое или малое.

Второе возражение состоит в том, что критерий не учитывает того, что априорная вероятность получения необычного наблюдения изменяется от одного наблюдателя к другому. Напротив, он одинаково относится ко всем наблюдателям, поскольку полагает, что указанная вероятность определяется общим для всех математическим принципом. Хорошо известно, однако, что у некоторых наблюдателей очень мало необычных результатов, тогда как другие весьма склонны к ним. И ясно, что, имея дело с наблюдением, ошибка которого так велика, что мы не знаем, считать ли его обычным или нет, мы должны очень сильно полагаться на наше возможное знание степени тщательности наблюдателя.

Факт, однако, что против любой системы отбрасывания наблюдений, предположенных необычными, можно возразить, что она приводит к результату, который является разрывной функцией ошибок отдельных наблюдений и потому иногда неопределенному. Пусть, к примеру, мы имеем три наблюдения, два из которых близки друг к другу, а третье отстоит на x от среднего m_1 из них. Тогда, включив это третье, мы получим среднее

$$m_2 = m_1 + x/3.$$

В обычной астрономической практике мы оставляем это m_2 до тех пор, пока x не выходит за пределы обычной, как мы считаем, ошибки. Но как только этот предел достигнут, мы полностью отбрасываем x и принимаем m_1 вместо m_2. Другими словами, если считать, что x возрастает от нуля, принятое среднее будет возрастать на $x/3$ вплоть до достижения установленного предела, но затем перескочит от m_2 к m_1. Будь критическая точка для отбрасывания x удовлетворительно установлена, подобный образ действий оказался бы менее предосудительным. Фактически, однако, эта точка определяется исследователем, который и сам должен сомневаться, принять ли ему m_1 или m_2. И, конечно же, во многих случаях различные исследователи примут различные решения, так что вероятнейший результат часто окажется неопределенным.

Имеются виды важных наблюдений, при которых доля крупных ошибок столь велика, что невозможно разделить наблюдения на обычные и необычные. Таковы наблюдения прохождений Венеры и Меркурия по солнечному диску, и примечательный пример был указан нами (1882) при обсуждении прохождений Меркурия. Сравнивая друг с другом 684 наблюдения, мы установили, что ошибка половины из них заключалась в пределах $\pm 6''.8$. При следовании ошибок обычно принимаемому закону лишь 5 должны были бы превзойти $\pm 27''$, фактически же их оказалось 49. И всё же соответствующие наблюдения не могут считаться совсем бесполезными, потому что их результаты не разбросаны вполне случайно, а в основном содержатся в сравнительно узких границах и отличаются от остальных только тем, что их вероятная ошибка больше.

Этот случай можно пояснить, припомнив, что предположенный закон устанавливает, что в смысле подверженности ошибкам качество всех исследуемых наблюдений одно и то же[4]. Иначе говоря, что они все подвержены одним и тем же ошибкам и отличаются друг от друга только ввиду случайных обстоятельств, которые и приводят к [тем или иным] ошибкам. А если это не так, если, к примеру, у одной доли наблюдений вероятная ошибка мала, у другой доли она больше, у третьей – еще больше, и т. д., то ошибки системы в целом не будут подчиняться указанному закону, и мы установим, что крупные ошибки встречаются слишком часто. И это должно происходить почти во всех астрономических и физических исследованиях.

Отсюда следует новое заключение. В подобной смешанной системе наблюдений вероятнейшим результатом окажется не среднее арифметическое, а такое среднее, при котором более уклоняющимся наблюдениям придается меньший вес. Это станет очевидным, если учесть, что в указанном случае более уклоняющиеся результаты будут вероятно доставлены наблюдениями с большей вероятной ошибкой и потому обладающие меньшим весом.

2. Видоизмененные кривые вероятностей

Предыдущие соображения приводят к новому заключению о том, что обычно принимаемая теория, предполагающая непременное существование некоторого единственного “вероятнейшего значения” измеряемой величины, не является [достаточно] общей. На самом деле ввиду возможности необычных наблюдений кривая вероятностей может в особых случаях принимать весьма различные формы. Предположим в качестве примера, что два средних склонения звезды, определенные хорошим меридианным кругом, цена деления окулярного микрометра которого равна 5″, отличаются друг от друга примерно на 5″. Мы можем сделать три предположения: либо оба наблюдения обычны, либо в одном или в другом случае наблюдение ошибочно на 5″ ввиду его неверной записи.

В зависимости от вероятностей этих предположений мы получим различные кривые. Если инструмент и наблюдатель настолько точны, что различие в 5″ между двумя обычными наблюдениями почти невозможно, мы придем к кривой формы А [с двумя одинаковыми вершинами]. По мере повышения вероятности этого предположения кривая может принять форму В [с тремя одинаковыми вершинами меньшей высоты][5]. А если известно, что наблюдатель никогда не ошибается при отсчете [записи?] своих результатов, кривая станет приближаться к своей обычной форме.

Ясно, что в случае, указанном кривой А, мы не можем назначить никакого единого вероятнейшего результата наблюдаемой величины. Единственное исчерпывающее утверждение было бы воплощено в таблице, показывающей вероятность каждому отдельному возможному значению искомой величины отличаться от нее не более, чем на небольшое произвольное число [α]. И если интервалы таблицы приняты равными [2α], то сумма всех этих вероятностей окажется равной 1 [потому что интервал возможных значений будет заполнен без разрывов].

Заглядывая глубже, мы увидим, что таков и есть общий метод выражения вывода, к которому следует приходить при всех исследованиях наблюдения или серии наблюдений. Каким бы определенным ни было непосредственное значение, доставленное наблюдением, действительный вывод должен всегда быть представлен рядом отдельных вероятностей наблюдаемой величине принять то или иное из ее бесконечного количества [возможных] значений.

Если закон вероятностей тот, который обычно и принимается, то вероятность каждого приписываемого значения полностью определяется заданиями вероятнейшего значения и вероятной ошибки. Но не так обстоит дело, если закон отклоняется от принятой формы.

3. Ошибочные результаты. Ущерб и достоинство

Теперь возникает вопрос: при рассмотрении наиболее общего случая, при котором могут иметь место несколько максимумов вероятности, и, следовательно, нельзя отыскивать единого вероятнейшего значения,– возможно ли в этом случае установить какой-либо общий принцип и назначать в соответствии с ним некоторое единое значение, предпочитая его всем остальным.

Взяв в качестве примера случай, подобный А в п. 2, станет ясно, что никакой подобный принцип не возможен без принятия какой-либо предпосылки, которая установила бы правило для выбора между ошибками различной величины. Пусть, чтобы уточнить эту мысль, в случае А результатами двух отдельных наблюдений будут 0″.0 и 5″.0, тогда три упомянутых предположения приведут к значениям 0″.0, 2″.5 и 5″.0, из которых мы должны будем выбрать одно.

Остановившись либо на первом, либо на третьем, мы обеспечим себе вероятность немного ниже 1/2 оказаться очень недалеко от истины, такую же вероятность ошибиться на 5″, и очень низкую вероятность ошибиться примерно на 2″.5. Если же, напротив, мы выберем 2″.5, то будем почти уверены в том, что ошиблись на 2 или 3″, но не больше. Наш выбор, следовательно, должен зависеть от того, предпочтем ли мы наверняка ошибиться на 2″.5, либо равную вероятность не ошибиться вообще или ошибиться на 5″. И это подводит нас к новому вопросу: нанесет ли ошибка в 5″ меньше или больше двойного ущерба по сравнению с ошибкой в 2″.5[6].

Обычные требования повседневной жизни благоприятствуют мнению о том, что ущерб возрастает быстрее, чем ошибка, и вот примеры. Легко видеть, что вероятность того, что ошибка в положении судна, возникшая ввиду ошибки в морском ежегоднике, приводит к кораблекрушению, возрастает быстрее, чем сама ошибка. Или же, как нам известно, для уменьшения вдвое вероятной ошибки измеряемой величины приходится вчетверо увеличить число наблюдений[7]. И поэтому представляется, что лучше всего предположить, что ущерб от ошибки пропорционален квадрату ее величины[8].

Значение наблюдения возрастает или убывает в зависимости от того, подвержено оно ошибкам в меньшей или большей степени. Простейшее возможное определение этого значения состоит в том, что оно обратно пропорционально полной сумме отдельных ущербов, умноженных на их вероятности[9]. И это в точности соответствует обычному закону вероятности некоторого числа наблюдений, потому что основано на предпосылке о том, что значение результата пропорционально числу тех наблюдений, которые привели к нему. Но так как при указанном употреблении слово *значение* окажется двусмысленным, поскольку оно применяется к простому количеству, мы предпочтем термин *достоинство*, чтобы выразить экономическую суть назначенного значения. И вот, стало быть, наши определения.

1. *Ущерб* каждого значения, назначенного данной величине, равен сумме всех произведений, полученных умножением квадрата каждой возможной ошибки этого значения на вероятность ее появления.

2. *Достоинство* любого такого значения обратно пропорционально его ущербу.

Значение, которое мы должны будем предпочитать, это то, чье достоинство наибольшее, или, что то же самое, чей ущерб наименьший. Это значение и величина, которому оно подвержено, окажутся теми двумя элементами, которые соответствуют вероятнейшему значению и вероятной ошибке в обычной теории.

4. Алгебраическое выражение ущерба

Легко вывести общее выражение для этих элементов. Выразим все возможные значения исследуемой величины рядом

$$x_1, x_2, \dots, x_n \qquad (1)$$

и пусть

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

будут их вероятности, сумма которых должна быть равна единице.

Обозначая через x любое значение исследуемой величины, получим, в соответствии с определением, его ущерб

$$e = p_1(x - x_1)^2 + p_2(x - x_2)^2 + \ldots + p_n(x - x_n)^2 = x^2 - 2Ax + B,$$

$$A = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,\ B = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2.$$

Он минимален при $x = A$, и это минимальное значение мы должны предпочесть. Его ущерб равен

$$e_0 = B - A^2.$$

[…] Обратное значение этого выражения является достоинством лучшего значения искомой величины, т. е. значения

$$x_0 = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n. \qquad (2)$$

До сих пор мы предполагали, что ряд (1) состоит из конечного числа дискретных значений x. Обычно, однако, неизвестная величина может принимать все значения в некоторых широких пределах, и тогда вероятность, что она заключена между x и $x + dx$ задается уравнением вида

$$dp = \varphi(x)dx,$$

где dp – бесконечно малая вероятность. Это – отвлеченное число, и поэтому какая бы физическая величина ни была обозначена через x, из указанного уравнения следует, что $\varphi(x)$ должна иметь относительно ее размерность – 1.

Сведя формулу (2) к данному случаю, мы находим, что предпочтительное значение x определяется формулой

$$x_0 = \int x\varphi(x)dx, \qquad (3)$$

а его ущерб равен

$$e_0 = (1/2)\iint \varphi(y)\varphi(z)(y - z)^2dydz = \int y^2\varphi(y)dy - \iint yz\varphi(y)\varphi(z)dydz.$$

По определению ущерба его размерность равна + 2 в единицах измеряемой физической величины, а корень квадратный из ущерба является поэтому ее определенным значением, и мы можем рассматривать его как погрешность.

Примером новой теории может служить ее применение к случаю обычно принимаемого закона ошибок

$$\varphi(x) = (h/\sqrt{\pi})\exp(-h^2x^2). \qquad (4)$$

Здесь предпочтительным значением x является $x_0 = 0$, что соответствует обычной теории, а в формуле для его ущерба окажется, что

$A = x_0 = 0,\ B = (h/\sqrt{\pi}) \int\ y^2 \exp(-h^2 y^2) dy = 1/2h^2.$

Это значение B совпадает с квадратом того, что обычно называется *средней* ошибкой, которая в свою очередь почти равна полуторной вероятной ошибке. Таким образом, в этом специальном случае ущерб совпадает с квадратом средней ошибки.

Если принять в качестве значения x не нуль, а некоторое другое число, то его ущерб будет равен

$$e = x^2 + B = \varepsilon^2 + x^2,$$

где ε – средняя ошибка. Или же, при переходе к вероятной ошибке, это выражение примет вид

$$e = x^2 + 2.198r^2.$$

Легко заметить, что, прибавив к вероятнейшему значению некоторой величины ее вероятное значение, мы увеличим ущерб немного меньше, чем вполовину. Представляется поэтому, что каким бы ни был закон ошибок, мы всегда сможем найти две величины, соответствующие *вероятнейшему значению* и *вероятной ошибке* в обычной теории. Одна из них окажется, естественно, наилучшим значением искомой величины, т. е. будет равняться A, другая же будет либо ущербом величины A, либо изменением в значении той величины, которая требуется, чтобы увеличить ущерб в определенном соотношении (the change in the value of the magnitude required to increase its evil). Эти последние оказываются функциями одной и той же величины, а потому и друг друга. Если представить результат в виде

$$x = A \pm \sqrt{B - A^2}\ \ [= A \pm \alpha],$$

то в обычной теории [α] будет "средней ошибкой" или изменением x, которое удвоит его ущерб в обобщенной теории. А если мы пожелаем выразить величину, соответствующую вероятной ошибке, то надо будет написать

$$x = A \pm 0.6745\sqrt{B - A^2}\ .$$

5. Видоизмененный закон вероятности

Теперь вся наша задача сводится к отысканию кривой вероятности в случае некоторого числа наблюдений одной и той же величины [в случае непосредственных наблюдений]. И эта задача естественно включает в себя вопрос о законе ошибок отдельных наблюдений и приводит нас к исследованию необходимых видоизменений в обычно принятом законе, чтобы он мог применяться в любых случаях.

Недостаток обычно принятого закона, выраженного уравнением (4), состоит в том, что на практике крупные ошибки происходят чаще, чем он указывал бы. Этот недостаток можно исправить, принимая в показателе какую-либо иную функцию вместо h^2x^2. Она должна будет

1. Быть четной функцией x, т. е. иметь форму $f(x^2)$.
2. Оказываться бесконечной вместе с x.
3. Возрастать менее быстро, чем h^2x^2. Точнее, ее вторая производная d^2f/dx^2 должна убывать с возрастанием x, а не оставаться постоянной.

Подобную функцию можно представить, записав

$$\frac{h^2(1+h^2x^2)}{1+h_1^2x^2}$$

вместо h^2, так что показателем функции $f(x^2)$ окажется

$$-\frac{h^2(x^2+h^2x^4)}{1+h_1^2x^2}.$$

Иметь дело с таким показателем может, однако, быть неудобным, и я укажу закон ошибок, основанный на весьма вероятном предположении о том, что мы имеем дело со смесью наблюдений, обладающих различными мерами точности

$$h_1, h_2, \ldots, h_n,$$

и пусть

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

будут вероятностями, что случайно выбранное наблюдение характеризуется соответствующей мерой точности. Тогда закон ошибок такого наблюдения примет вид

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{\pi})[p_1h_1\exp(-h_1^2x^2) + p_2h_2\exp(-h_2^2x^2) + \ldots + p_nh_n\exp(-h_n^2x^2)]. \qquad (5)$$

6. Вывод наилучшего результата

Пусть дано m наблюдений одной и той же величины

$$x_1, x_2, \ldots, x_m.$$

Если принять закон ошибок (5), то вероятность измеряемой величине содержаться в пределах η и η + dη будет задана уравнением

$$dp = \alpha\psi(\eta)d\eta,\ \psi(\eta) = \varphi(x_1-\eta)\,\varphi(x_2-\eta)\ldots\varphi(x_m-\eta), \qquad (6)$$

а α выбирается так, чтобы

$$\alpha\int\psi(\eta)d\eta = 1.$$

Формула (3) теперь позволит получить для наилучшего значения x выражение

$$x = \int\eta dp = \alpha\int\eta\psi(\eta)d\eta = \int\eta\psi(\eta)d\eta \div \int\psi(\eta)d\eta. \qquad (7)$$

Из этого выражения исчезнет любая постоянная, умноженная на ψ(η), и мы можем поэтому пренебречь всеми постоянными множителями в этой формуле и принять для нее произведение m величин

$$\prod_{i=1}^{m}\{h_1p_1\exp[-h_1^2(x_i-\eta)^2] + h_2p_2\exp[-h_2^2(x_i-\eta)^2] +$$

$\ldots + h_n p_n \exp[-h_n^2(x_i - \eta)^2]\}$.

В нем окажется n^m членов вида

$P\exp(-k^2\eta^2 + 2b\eta - c)$,

где

$$P = h_i p_i h_j p_j h_l p_l \ldots h_r p_r,\ k^2 = h_i^2 + h_j^2 + h_l^2 + \ldots + h_r^2,$$

$$b = h_i^2 x_1 + h_j^2 x_2 + h_l^2 x_3 + \ldots + h_r^2 x_m, \qquad (8)$$

$$c = h_i^2 x_1^2 + h_j^2 x_2^2 + h_l^2 x_3^2 + \ldots + h_r^2 x_m^2,$$

а $i, j, l, \ldots, r$ – любые m чисел из индексов 1, 2, …, n, взятые с повторениями. Запишем поэтому

$$\psi(\eta) = \sum P\exp(-k^2\eta^2 + 2b\eta - c). \qquad (9)$$

При интегрировании окажется

$$\int \psi(\eta)d\eta = \sum \frac{P\sqrt{\pi}}{k}\exp[(b^2/k^2) - c],$$

$$\int \eta\psi(\eta)d\eta = \sum \frac{Pb\sqrt{\pi}}{k^3}\exp[(b^2/k^2) - c].$$

Будем теперь различать n^m значений каждой из величин P, k, b, c индексами 1, 2, …, l, так что $l = n^m$, и примем для ясности[10]

$$\eta_t = b_t/kt^2,\ w_t = (P_t/k_t)\exp[(b_t^2/k_t^2) - c_t],\ t = 1, 2, \ldots, l. \qquad (10a, b)$$

Тогда из уравнения (7) мы получим

$$x = \frac{w_1\eta_1 + w_2\eta_2 + \ldots + w_l\eta_l}{w_1 + w_2 + \ldots + w_l}. \qquad (11)$$

Этот результат можно сопроводить утверждением, которое вполне прояснит принципы нового метода вне зависимости от математических выкладок. Величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ числом n^m – это *взвешенные средние* наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Каждое среднее образовано, исходя из предположения о распределении мер точности $h_1, h_2, \ldots, h_n$ по отдельным наблюдениям. Поскольку каждое наблюдение, не зависимо от всех остальных, может обладать любой из n мер точности, число этих предположений будет равно n^m, и все они приведут к различным средним η. Окончательное значение x снова окажется взвешенным средним из результатов различных предположений с весом каждого из них, пропорциональным вероятности w того предположения, от которого он зависит. Эта вероятность является произведением двух сомножителей, один из которых, P/k, пропорционален вероятности соединения, а второй, $\exp[(b^2/k^2) - c]$, является вероятностью соединения крупных ошибок, к которым приводит предпосылка.

7. Приложение к примеру

Прежде, чем показать, как описанный метод может быть упрощен на практике, было бы интересно привести простой числовой пример его строгого применения. Пусть мы имеем три наблюдения такого класса, что наблюдение доброкачественно с вероятностью 2/3 и негодно с вероятностью 1/3 с соответствующими мерами точности 4 и 1. Допустим, что результаты оказались равными 0, 0 и 1.

У нас нет никаких априорных причин, чтобы отличить эти наблюдения друг от друга, и поэтому обычный метод вывода наилучшего результата приведет либо к 1/3, либо к отбрасыванию третьего наблюдения, и, следовательно, к результату 0. С точки зрения данного исследования, согласование первых двух наблюдений и их уклонение от третьего укрепит предположение о том, что первые два наблюдения доброкачественны, третье же негодно.

Приняв его, мы получим веса результатов 16, 16 и 1 и наилучший результат, равный 1/33 [= (16·0 + 16·0 + 1·1)/33]. Тем не менее, поскольку всякое другое возможное предположение приведет к большему числу, наилучший результат должен быть больше 1/33. Строгая обработка этих наблюдений приводит к

$$\varphi(x) = (1/3\sqrt{\pi})[8\exp(-16x^2) + \exp(-x^2)]$$

и, при $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 = 1$, к

$$\begin{aligned}\psi(\eta) = {} & 512 \exp(-48\eta^2 + 32\eta - 16) + 64 \exp(-33\eta^2 + 2\eta - 1) + \\ & 128 \exp(-33\eta^2 + 32\eta - 16) + 16 \exp(-18\eta^2 + 2\eta - 1) + \\ & 8 \exp(-18\eta^2 + 32\eta - 16) + \exp(-3\eta^2 + 2\eta - 1).\end{aligned}$$

Эти шесть членов соответствуют шести существенно различным возможным предпосылкам о распределении мер точности по наблюдениям, ибо среди восьми предположений имеются две пары, каждая из которых приводит к одному и тому же результату. И вот таблица результатов.

Таблица 1 (с. 355 оригинала)

1	**2**	**3**	**4**
+ , + , +	1/3 = 0.3333	0.003	0.001
+/–, –/+, +	16/33 = 0.4848	0.006	0.003
– , – , +	8/9 = 0.8889	0.318	0.283
+ , + , –	1/33 = 0.0303	4.224	0.128
+/–, –/+, –	1/18 = 0.0555	1.467	0.082
– , – , –	1/3 = 0.3333	0.296	0.099
Σ		6.314	0.596

Наименование столбцов. 1. Предположения о наблюдениях; символами + и – обозначены соответственно доброкачественные и негодные. 2. b/k^2. 3. $(P/k)\exp[(b^2/k^2) - c]$. 4. Произведения

Значение с наибольшим достоинством равно $x =$ 0.0944.

8. Видоизменение метода при большом числе наблюдений

Для применения описанного метода необходимо знать вероятности того, что мера точности каждого наблюдения принимает то или иное из возможных значений. В случае большого числа наблюдений они определяются по фактическому распределению уклонений от исследуемой величины. Если окажется, что в каком-то виде наблюдений уклонения следуют обычно применяемому закону, мы должны будем получить лишь одно значение h. Но если, как обычно, число крупных уклонений будет больше, чем указывает обычная теория, мы примем одно, два, три или более дополнительных значений h и определим, сколько наблюдений следует приписать каждому, чтобы распределение могло было быть представлено уравнением вида (5).

Следуя строгому пути определения наилучшего среднего значения x, мы должны будем по уравнениям (8) и (10) составить n^m различных значений величин P, k, b, c, η и w, а затем, в соответствии с (11), определить требуемое значение x. Для этой цели присоединим, пусть мысленно, к каждой из величин P, k, и т. д. систему m индексов[11]

$$i, j, k, \ldots, q, \qquad (12)$$

каждый из которых принимает значения 1, 2, …, n. Эта система укажет значения соответствующих величин, которые появятся при назначении

значению x_1 – меры точности h_i, значению $x_2 - h_j$,
значению $x_3 - h_k$, …, значению $x_m - h_q$.

Более того, мы обозначим соединение индексов (12) единым символом t. Каждое значение w в функции (10b) может быть теперь записано в форме

$$w_t = (P_t/k_t)\exp(-\Delta_t/k_t^2),\ \Delta = k^2c - b^2.$$

Если еще заменить k^2, b и c их значениями в соответствии с формулой (8), последнее выражение сведется к

$$\Delta = \sum_{i,j} h_i^2 h_j^2 (x_i - x_j)^2,\ i = 1, 2, \ldots, m-1;\ j = i+1, i+2, \ldots, m,$$

где h_i временно обозначает то специальное значение h, которое в любом соединении придано x_i. И мы можем равным образом представить Δ в виде

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} h_i^2 h_j^2 (x_i - x_j)^2.$$

В первой форме $m(m-1)/2$ членов, во второй – m^2, если причислить те, которые исчезают при $i = j$. Поскольку Δ зависит лишь от разностей величин x, оно не изменится, если из всех последних вычесть любую постоянную. Вычтем поэтому η:

$$\xi_i = x_i - \eta.$$

Тогда, для каждого соединения индексов,

$$\Delta/k^2 = h_1^2\xi_1^2 + h_2^2\xi_2^2 + \ldots + h_m^2\xi_m^2.$$

Строго говоря, каждое из значений ξ_i должно зависеть от m индексов $i, j, k, \ldots, r$, потому что от них зависят значения η. Но при большом m в выраженном большинстве соединений различные значения η, происходящие от различия в соединениях индексов, будут лишь незначительно отличаться друг от друга. Поэтому, при вычислении m значений ξ можно принять единое среднее значение η для всех соединений индексов.

Теперь нам надо подставить указанное выше значение Δ в экспоненциальное выражение для w. Если положить

$$w_i^{(j)} = h_i\, p_i \exp(-h_i^2 \xi_j^2),\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m, \qquad (13)$$

где, заметим, индекс i понимается в его первоначальном смысле, мы получим

$$w_{i,\,j,\,k,\,\ldots,\,r} = w_i^{(1)} w_j^{(2)} w_k^{(3)} \ldots w_r^{(m)} \div k_{i,\,j,\,k,\,\ldots,\,r},$$

$$\eta_{i,\,j,\,k,\,\ldots,\,r} = [h_i^2 x_1 + h_j^2 x_2 + \ldots + h_r^2 x_m] \div k_{i,\,j,\,k,\,\ldots,\,r}.$$

Затем следует ввести другое приблизительное предположение о том, что различные значения k так близки друг к другу, что могут считаться равными. И учтем, что k^2 – это сумма квадратов m значений величин h и что в выраженном большинстве случаев эта сумма будет приближаться к некоторому среднему значению, которое найдется при распределении m значений среди n классов пропорционально их вероятностям.

Если подставить полученные значения w и η в (11), то в принятом предположении окажется, что значение x может приведено к виду

$$x = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + \ldots + W_m x_m}{W_1 + W_2 + \ldots + W_m},$$

$$W_j = [h_1^2 w_1^{(j)} + h_2^2 w_2^{(j)} + \ldots + h_n^2 w_n^{(j)}] \div \Sigma w_i^{(j)},\ j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (14)$$

Эти значения W являются видоизмененными весами результатов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, соответствующими вероятным изменениям h от одного наблюдения к другому. Не будь таких изменений, будь лишь одно значение h, все эти веса оказались бы равными друг другу. Но в случае описанной теории каждый результат x_i может обладать любым из весов $h_1^2, h_2^2, \ldots$ и уравнения (14) определяют их некоторое среднее, которое мы должны будем приписать x_i. Коэффициенты W являются функциями ξ и могут быть табулированы как таковые в любом специальном случае.

До сих пор мы предполагали, что никакое различие между весами результатов не было известно заранее. Но поскольку каждое наблюдение может иметь любой из весов $h_1, h_2, \ldots, h_n$, то некоторый средний вес w каждого из них определяется апостериорно по уравнениям (14) как функция уклонения от общего среднего. Этот средний вес может быть табулирован в качестве функции от ξ и таким образом выбран из таблиц по одному аргументу. Если же нам известно что-то про какое-то наблюдение, и мы поэтому назначаем ему одну меру точности, а не иную, то сможем видоизменить значения $w_j^{(i)}$, расположив $h_1, h_2, \ldots$ по порядку их убывания, установив, что h_1^2 – вес каждого наблюдения высшего класса. Теоретически, однако, наилучший метод обработки в таких случаях будет зависеть от обстоятельств. Его простота настолько важна, что будет, вероятно, хорошо заменить W его произведением на вес, установленный по априорным соображениям.

9. Приложение к прохождению Меркурия по солнечному диску. Здесь я имею в виду приложить описанную теорию к случаю наблюденных контактов внутренних планет, Меркурия и Венеры, с краем Солнца. Наблюдения этих явлений являются особенными, потому что громадное их число пришлось отбросить ввиду уклонений от общего среднего. Но при подходящем отбрасывании можно получить намного отличающиеся окончательные результаты, а установить какую-либо границу между отбрасываемыми и оставляемыми наблюдениями невозможно.

При обсуждении наблюдений прохождения Меркурия я (1882) показал, что уклонения 684 наблюдений внутреннего контакта краев Солнца и Меркурия распределяются следующим образом (значение каждого уклонения учитывается лишь с точностью до ближайших круглых пяти секунд времени):

Ниже – 27 секунд	20 уклонений
от – 27 до – 23	11 уклонений […]
от 23 до 27	12 уклонений
> 27	29 уклонений

Объединяя равные по абсолютной величине уклонения и отнеся их к среднему значению соответствующей группы, мы получим следующее сравнение действительных и вероятных чисел, основанных на обычной теории с предполагаемой вероятной ошибкой ± $6^s.67$ или $1/h = 14^s.0$

Таблица 2 (с. 359 и 360 оригинала)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	147	137	10	143	4
5	221	240	– 19	220	1
10	129	166	– 37	128	1
15	77	88	– 11	76	1
20	38	36	2	44	– 6
25	23	12	11	23	0
> 27	49	5	44	26	23

Наименование столбцов. 1. Средние значения уклонений. 2 – 3. Фактические и вероятные количества уклонений. 4. Разности. 5 – 6. Фактические и вероятные количества уклонений при некотором дополнительном предположении, см. ниже. Эти столбцы вставлены нами взамен отдельной таблицы, помещенной в оригинале.

Налицо, таким образом, существенный избыток и малых, и крупных уклонений, который оказался бы еще более выраженным, будь средняя ошибка определена по сумме квадратов их всех. После нескольких попыток я обнаружил, что уклонения, не превышающие 27^s, можно хорошо представить следующим распределением

Таблица 3 (с. 359 оригинала)

1	**2**	**3**
110	6^s	$2^s.9$
100	10	4.8
400	18	8.6
50	36	17.2

Наименование столбцов. 1. Количество наблюдений. 2. $1/h$.
3. Соответствующая вероятная ошибка.

Сравнение действительного и вероятного количеств уклонений окажется теперь таким [см. столбцы 5 и 6 Таблицы 2].

Следует иметь в виду, что принятые 4 значения $1/h$ или соответствующих вероятных ошибок не являются столькими же вполне определенными количествами. На самом деле нам следовало бы считать, что точность принимает все значения между крайними границами и является непрерывно изменяющейся величиной, но это вовсе не обязательно. Нам достаточно составить выражение, которое представило бы соотношение между числом и величиной уклонений, а этого всего удобнее достичь, предполагая существование трех, четырех или более отдельных значений h, а затем установить, сколько наблюдений приписать каждому классу, чтобы представить наблюденное соотношение. Из приведенной таблицы можно заключить, что примерно 1/3 наблюдений прохождения Марса относится к классам, которые позволительно считать хорошими или очень хорошими с вероятной ошибкой в 2.5 – 6^s, что более половины относится к среднему классу, в котором вероятная ошибка может заключаться в пределах 6 – 12^s и что около 1/12 произведено при столь неблагоприятных обстоятельствах, что их вероятная ошибка в среднем составляет 17^s. Но мы видим, что даже при этой крупной ошибке оказался избыток в 23 уклонения, превышающих 27^s, так что следовало бы увеличить [оцениваемое] число наблюдений этого несовершенного класса. Но я подозреваю, что большое число этих ошибок было вызвано неверной записью минуты или другими грубыми промахами. И я также склонен думать, что сравнительный избыток очень малых уклонений, который указывает, что вероятная ошибка 1/5 наблюдений была равна всего лишь 3^s, могла быть частично вызвана тем, что многие уклонения получены относительно среднего из малого числа наблюдений без какого-либо сравнения отдельных наблюдений с окончательной теорией, основанной на всех наблюдениях. В целом, мы можем предполагать, что из произведенных наблюдений

0.30 имеют точность в секундах времени $h_1 = 1/10$
0.60 $h_2 = 1/18$
0.10 $h_3 = 1/36$

Закон вероятности, т. е. уравнение (5), примет тогда вид

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{\pi})\{0.030\exp[-(x/10)^2] + 0.0333\ldots\exp[-(x/18)^2] + 0.00277\ldots\exp[-(x/36)^2]\}$$

и, по уравнению (13)

$$w_1 = 0.0300\exp[-(\xi/10)^2],\ h_1^2 = 1/100,$$
$$w_2 = 0.3333\exp[-(\xi/18)^2],\ h_2^2 = 1/324,$$
$$w_3 = 0.0277\exp[-(\xi/36)^2],\ h_3^2 = 1/1296.$$

В следующей Таблице 4 требуемые величины приводятся в функции уклонения ξ наблюдения; для удобства величины w умножены на 1000, а W – на 10 000.

Таблица 4 (с. 361 оригинала)

ξ	w_1	w_2	w_3	W
0	30.0	33.3	2.8	6.1
2	28.8	32.9	2.8	6.1
4	25.6	31.7	2.7	5.9
6	20.9	29.8	2.7	5.7
8	15.8	27.4	2.6	5.3
10	11.0	24.5	2.6	4.9
12	7.1	21.4	2.5	4.5
14	4.2	18.2	2.4	4.0
16	2.3	15.1	2.3	3.6
18	1.2	12.3	2.2	3.3
20	0.55	9.70	2.04	3.0
22	0.23	7.49	1.91	2.8
24	0.09	5.63	1.78	2.6
26	0.03	4.14	1.65	2.5

28	0.01	2.96	1.52	2.3
30	0.00	2.07	1.39	2.2

Будь мы уверены, что какое-либо наблюдение относится к лучшему, среднему или худшему классу, его вес по указанному выше был бы равен соответственно 10, 3 и 0.77. Значение W для $\xi = 0$, а именно 6.1, менее 10 ввиду вероятности того, что наблюдение с нулевым уклонением могло принадлежать к одному из низших классов. Значение W для наблюдения с уклонением 30^s превышает 0.77 ввиду возможности, что подобное наблюдение могло принадлежать промежуточному классу.

10. Приближенное выражение ущерба

Осталось вывести выражение для ущерба результата, наилучшего в соответствии с предыдущим методом. Было определено и показано, что если вероятность значению наблюденной величине содержаться в пределах x и $x + dx$ равна $\theta(x)dx$, то ущерб любого принятого значения x_0 искомой величины будет задан уравнением

$$E = \int (x - x_0)^2\theta(x)dx.$$

Для m наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$, подчиняющихся обобщенному закону ошибок

$$\theta(x) = \alpha\varphi(x_1 - x)\ \varphi(x_2 - x) \ldots \varphi(x_m - x),$$

где α – постоянный коэффициент, определяемый условием

$$\int \theta(x)dx = 1.$$

Приняв за x_0 наилучшее значение x, а именно то, которое удовлетворяет уравнению

$$x_0 = \int x\theta(x)dx,$$

мы получим его ущерб, равный

$$E = \int x^2\theta(x)dx - x_0^2.$$

Заметим, что $\theta(x)$ отличается от $\psi(x)$ в уравнении (6) только сомножителем α. Иначе говоря,

$$\theta(x) = \alpha\psi(x) = \alpha\sum P\exp(-k^2x^2 + 2bx - c).$$

Имея в виду это α, мы можем исключить из $\psi(x)$ любой постоянный множитель, как, например, $\sqrt{\pi}$. Тогда из выражения для $\psi(x)$ мы получим

$$\int x^2\psi(x)dx = \sum P\frac{k^2 + 2b^2}{2k^5} \exp[(b^2/k^2) - c],$$

причем α определяется из условия

$$\alpha \int \psi(x)dx = 1 = \alpha \sum w.$$

Сравнивая этот результат с (9) и (10), мы получим

$$\int x^2\theta(x)dx = \frac{\sum w\eta^2}{\sum w} + \frac{\sum w/k^2}{2\sum w},$$

где суммирование распространяется на n^m распределений мер точности. Для наименьшего ущерба мы получим

$$\mathrm{E} = \frac{\sum w\eta^2}{\sum w} - \frac{(\sum w\eta)^2}{(\sum w)^2} + \frac{\sum w/k^2}{2\sum w} =$$

$$\frac{\sum\limits_{i,j} w_i w_j (\eta_i - \eta_j)^2}{(\sum w)^2} + \frac{\sum w/k^2}{2\sum w}, \qquad (15a, b)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n^m - 1, j = i + 1, i + 2, \ldots, n^m.$$

Второй член в правой части этого уравнения является некоторым средним из различных значений ($1/2k^2$) и в обычной теории совпадает с квадратом средней ошибки, который, как было показано, совпадает с ущербом в нашем понимании. Если распределение величин h по значениям x единственно, то значение η окажется единственным и первый член ущерба исчезнет, так что в нем останется лишь средняя ошибка. Но если, как мы здесь предполагаем, сами веса наблюдений неопределенны, то последнее уравнение выражает логическое заключение о том, что полный ущерб должен быть образован как сумма средней неопределенности наблюдений и величины, зависящей от неопределенности весов, которые мы приписываем наблюдениям по отдельности или совместно.

Первый член уравнения (15b) включает $\mu(\mu - 1)/2$, $\mu = n^m$, членов и его действительное вычисление поэтому невозможно. Заметим, однако, что он может быть выражен в виде

$$\sum \alpha_{i,j}(x_i - x_j)^2,$$

где $\alpha_{i,j}$ – числовые коэффициенты, а число членов равно лишь $m(m - 1)/2$. Чтобы доказать это, мы заметим, что каждое значение η может быть записано в виде

$$\eta = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_mx_m,\ p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Разность между любыми двумя значениями η, умноженная на любой сомножитель вида $\sqrt{w_iw_j}/\sum w$, будет поэтому иметь вид

$$\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \ldots + \mu_mx_m,\ \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = 0, \qquad (16a, b)$$

в котором каждый из коэффициентов μ_1, μ_2 и т. д. принимает $n^m(n^m - 1)/2$ значений в соответствии с числом разностей η. Сумма квадратов этих разностей равна

$$x_1^2\sum \mu_1^2 + x_2^2\sum \mu_2^2 + \ldots + x_m^2\sum \mu_m^2 +$$

$$2x_1x_2\sum \mu_1\mu_2 + 2x_1x_3\sum \mu_1\mu_3 + 2x_2x_3\sum \mu_2\mu_3 + \ldots$$

и, ввиду условия (16b) может быть представлена в виде

$$\sum A_{i,j}(x_i - x_j)^2,\ A_{i,j} = -\sum \mu_i\mu_j.$$

Суммирование здесь распространяется на все $n^m(n^m - 1)/2$ произведения величин μ с совпадающими индексами i и j.

Значение полученного выражения может быть в точности определено, но вряд ли это окажется полезным в каком-либо конкретном случае. Возвращаясь к уравнению (15b), мы прежде всего заметим, что его первый член равен половине среднего величин $(\eta_i - \eta_j)^2$, взятых с весами w_iw_j и учетом нулевых членов $(\eta_i - \eta_i)^2$ с половинным весом. И вместо этого взвешенного среднего мы можем принять общее среднее, вычисленное с совпадающими весами.

Если число наблюдений велико, можно считать, что величину, на которую любое η отличается от среднего из всех его значений, или от x, является результатом накопления случайных ошибок. Именно, приняв

$$h_i^2/k^2 = q_i, \tag{17}$$

где h_i – точность, приданная x_i, мы получим

$$\eta = q_1x_1 + q_2x_2 + q_mx_m,$$

и x, равным среднему из всех m значений x_i с весами, равными взвешенному среднему q_i' из всех n^m значений q_i [12].

И если, как и раньше, ξ_i будет уклонением x_i от общего среднего x, то ввиду

$$\sum q_i = \sum q_i' = 1,$$

мы получим

$$\eta - x = (q_1 - q_1')\xi_1 + (q_2 - q_2')\xi_2 + \ldots + (q_m - q_m')\xi_m.$$

Но во всех случаях k^2 является суммой *некоторого* числа значений h^2, среднее значение q в соответствии с уравнением (17) оказывается равным $(1/m)$. Действительные частные значения никогда не могут достичь нуля в качестве своего нижнего предела и редко превысят $(2/m)$. Размах значений будет, однако, зависеть от размаха точностей h. За исключением особых случаев среднее уклонение q от $(1/m)$ не превысит $(1/2m)$. Другими словами, среднее значение $(q - q')$ окажется, вообще говоря, менее $(1/2m)$. Назначив это среднее значение, мы сможем считать $(\eta - x)$ составленным ввиду вероятного накопления членов

$$(1/2m)(\pm\ \xi_1 \pm \xi_2 \pm \ldots \pm \xi_m).$$

Приняв Δ^2 за среднее значение ξ^2, мы получим в соответствии с теорией ошибок

Среднее значение $(\eta - x)^2 = \Delta^2/4m$

и потому

Среднее значение $(\eta_i - \eta_j)^2 = \Delta^2/2m = \Sigma\xi^2/2m^2$.

Чтобы сравнить это с уравнением (15), предположим, что вероятнейшее распределение точности по величине имеет вид

Значение m_1 точностей равно h_1,
Значение m_2 точностей равно h_2, …,
Значение m_n точностей равно h_n.

Тогда мы получим в качестве хорошего приближения к среднему значению k^2

$$k^2 = m_1h_1^2 + m_2h_2^2 + \ldots + m_nh_n^2,$$

половину обратного значения которого можно принять за последний член уравнения (15b). И поэтому во всех обычных случаях мы можем принять за ущерб

$$E = \frac{1}{2(m_1h_1^2 + m_2h_2^2 + \ldots + m_nh_n^2)} + \frac{\Delta^2}{2m}.$$

Как было показано, в соответствии с обычной теорией этот ущерб равен квадрату ожидаемой средней ошибки, так что

$$\varepsilon = \pm\sqrt{E}$$

можно принять за эту ошибку.

В заключение я замечу, что эта теория и этот метод могут быть распространены на случай нескольких неизвестных с единственным затруднением в том, что исходные уравнения придется принимать с *апостериорными* весами. При необходимости нам придется вначале решить эти уравнения, считая их все равноточными, либо с такими весами, которые можно считать вероятнейшими. Получив уклонения, мы должны будем вывести закон ошибок, а для этого практически придется объединить эти уклонения со всеми другими, которые могут быть получены из астрономических наблюдений того же класса. И для получения окончательного результата мы должны будем заново решить исходные уравнения с видоизмененными весами.

Примечания

1. Ньюком таким образом косвенно определил понятие истинного значения измеряемой константы. Именно так ее и определяли начиная с Ламберта (1760 г.), а в 1826 г. Фурье впервые привел такое же, но уже формальное определение. Его независимо друг от друга повторили многие авторы включая Мизеса. См. по этому поводу Sheynin (2007b). О. Ш.

2. Ньюком следует здесь обычной практике того времени, которая, вопреки окончательному обоснованию метода наименьших квадратов (Гаусс 1823) и даже накапливающимся сведениям, продолжала полагаться исключительно на нормальный закон и на вероятную, а не среднюю квадратическую ошибку как меру точности. Впрочем, Ньюком посвятил свою статью обобщению нормального закона. Термин средняя квадратическая ошибка – сравнительно недавнего происхождения; Гаусс (1823,

§ 7) назвал ее *средней ожидаемой или просто средней*, и последний термин применял не только Ньюком, но и Красовский (1942).

Величину h (см. ниже) Гаусс (1809, § 178; 1816, § 1) назвал мерой точности, весом же он (1823, § 7) считал величину, обратную, как мы сказали бы, дисперсии, т. е. пропорциональную h^2. Ньюком неоднократно называл весом величину h, хотя в одном месте, в п. 8, ниже формулы (14), противореча самому себе, назвал весом и h, и h^2. О. Ш.

3. Некоторые последствия применения критерия Пирса в частных случаях, притом для трех – четырех наблюдений, не были, видимо, замечены. Вот они. Из трех наблюдений ни одно не отбрасывается, как бы намного ни уклонялось одно из них от среднего из остальных двух.

При четырех наблюдениях, три из которых в точности совпадают, четвертое будет всегда отбрасываться, как бы мало оно ни уклонялось от них. И вообще, если ни одно из тех трех наблюдений, которые лучше всего соответствуют друг другу, не отклоняется от среднего из них более, чем на ε, то четвертое, уклоняющееся от этого среднего более, чем на 4ε, будет отброшено. Так, если результаты наблюдений с меридианным кругом 0.3, 0.4, 0.5 и 0″.8, то последнее из них отбрасывается. С. Н.

Гораздо известнее стал к тому времени критерий Chauvenet (1863, т. 2, с. 558 – 566). Оба приведенные ниже замечания Ньюкома о критерии Пирса можно равным образом отнести и ко многим другим критериям. Вообще же обработка наблюдений настолько деликатна, что и современные математико-статистические критерии мало чем могут помочь. О. Ш.

4. Это замечание относится к любому закону распределения с фиксированной (пусть и неизвестной) мерой точности. О. Ш.

5. Неясно, почему именно три вершины; их меньшая высота объясняется тем, что площадь "под кривой" должна оставаться равной единице. Масштаба вдоль (единственной) оси абсцисс Ньюком не ввел. О. Ш.

6. Здесь заметно введение элементов теории статистических решений, см., например, Чернов и Мозес (1959). О. Ш.

7. В этом примере ущербом является объем работы. О. Ш.

8. Мысль об ошибках, каждая из которых подвержена ущербу, пропорциональному квадрату ее величины, высказал Гаусс (1823, § 6). Ущерб он назвал термином *jactura* [проигрыш]. С. Н.

В оригинале это примечание помещалось в конце данного пункта. О. Ш.

9. Ущерб – это случайная величина и *значение* наблюдения таким образом обратно пропорционально ожиданию ущерба. Чуть ниже Ньюком приравнял ущерб его ожиданию, а отсутствие самого термина *ожидание* быть может было характерным для того времени. О. Ш.

10. Чуть выше та же буква l имела другой смысл. О. Ш.

11. Ниже, после формулы (13), Ньюком заменил обозначение q на r. О. Ш.

12. Величины q_i случайны как и h_i, см. формулу (17). О. Ш.

Библиография

Красовский Ф. Н. (1942), Главная геодезическая основа в СССР. *Избр. Сочинения*, т. 4. М., 1955, с. 550 – 555.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (2007a), *История теории ошибок*. Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007b), The true value of a measured constant and the theory of errors. *Historia scientiarum*, vol. 17, pp. 38 – 48.

Chauvenet W. (1863), *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, vols 1 – 2. Philadelphia.

Chernoff H., Moses L. E., Чернов Г., Мозес Л. (1959, англ.), *Элементы теории статистических решений.* М., 1962.
Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1809, латин.), Теория движения … В книге автора (1957, с. 89 – 109).
--- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.
--- (1823, латин.), Теория комбинаций наблюдений … Там же, с. 17 – 57.
--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.
van Helden A. (1995), Measuring solar parallax: the Venus transits of 1761 and 1769 and their 19th-century sequels. В книге *General History of Astronomy*, vol. 2B. Редакторы R. Taton, C. Wilson. Cambridge, pp. 153 – 168.
Newcomb S. (1882), Discussion and results of observations on transits of Mercury from 1677 to 1881. *Astron. Papers*, vol. 1, pp. 363 – 487.
Peirce B. (1852), Criterion for the rejection of doubtful observations. *Astron. J.*, vol. 2, pp. 161 – 163.

А. С. Эддингтон
XVI

Замечания о методе наименьших квадратов

A. S. Eddington, Notes on the method of least squares
Proc. Phys. Soc., vol. 45, 1933, pp. 271 – 287

От переводчика

Мы включили эту статью, которая показывает, что даже в 1933 г. выдающийся астроном, имевший отношение к обработке измерений, рассуждал о методе наименьших квадратов (МНКв), не имея представления о существовании зрелой работы Гаусса (1823). Мало того, он несколько раз употребил непонятные термины и ошибочно приравнивал ошибки наблюдения к остаточным свободным членам исходных уравнений. По его докладу выступило четыре человека, но ни один из них также не знал об упомянутой работе Гаусса. Аналогичное невежество выказали многие выдающиеся ученые вплоть до Фишера в 1925 г. (Шейнин 2007, п. 5.5.2).

Автор пользовался в своих рассуждениях и вероятной, и средней квадратической ошибками. Первую формально ввел Бессель в 1815 г., Гаусс пользовался ей в своих письмах (например, в 1819 и 1826 гг.), хотя в другом письме 1825 г. высказался против нее, как “зависящей от гипотезы” (Шейнин 2007, с. 261). Попытаемся уточнить его довод.

Вероятную ошибку можно точно перевести в среднюю квадратическую, но только при нормальном распределении (последний термин, вошедший в употребление в начале XX в., автор так и не употребил); если ошибки примерно нормальны, то *вроде бы* соотношение между мерами точности будет выполняться приближенно. В этих случаях средняя квадратическая ошибка точно или приближенно описывает распределение в целом, если же оно сильно и притом неизвестно как отличается от нормального, то ни та, ни другая мера точности недостаточна. И всё же средняя квадратическая ошибка надежнее, потому что для нее известна ее собственная средняя квадратическая ошибка. Тем не менее вероятная ошибка оставалась во всеобщем употреблении быть может до конца XX в.

В п. 6 автор описал явно плохо известный *метод третей*, и мы обращаем на это внимание читателей.

1. Введение

Основная задача этой статьи состоит в том, чтобы оспорить две в некоторой степени преобладающие идеи:

1) Что метод наименьших квадратов (МНКв) обоснован только когда ошибки наблюдения распределены нормально.

2) Что общепринятая теория ошибок не одобряет никаких других часто применяемых на практике методов комбинации наблюдений.

И я также стремлюсь к тому, чтобы представить эту теорию без введения обращенной вероятности. Я знаю, что подобные или частично подобные взгляды уже известны, и возможно, что всё существенное в этой статье было уже когда-либо описано предшествующими авторами, но надеюсь, что, взятое в целом, для некоторых читателей мое описание покажет тему в новом свете[1].

Я полагаю, что все затруднения происходят от того, что авторы учебников часто считают само собой разумеющимся, что целью теории комбинации наблюдений является отыскание *вероятнейшего* значения исследуемой величины x. Такова странная навязчивая идея, хотя трудно представить себе обстоятельства, при которых ученому было бы интересно определять вероятнейшее значение x. И поэтому мы с самого начала должны будем настаивать на том, что не решение математических головоломок, а помощь при научном исследовании является задачей этой теории.

Физик стремится к *наиболее точному определению* x, смысл же этого термина четко указан в п. 2. Далее, хотя превосходная степень прилагательного может означать одну цель, более обычная задача – достижение его сравнительной степени, *более вероятного*; мы желаем оценивать, будет ли любой предложенный метод более точным и насколько именно, чем другой. Ни один практичный физик никогда не имел в виду определить физическую постоянную с наибольшей возможной точностью, он обычно стремится установить ее точнее, чем его предшественник, иногда же довольствуется достижением *достаточной точности*, соответствующей некоторому установленному мерилу. И подобные же цели вполне может ставить себе вычислитель.

2. “Наиболее точное определение”

Смысл этого понятия лучше всего объяснить на примере. Пусть мне требуется применить постоянную Планка, и в справочниках я отыскал два ее [устаревших] определения:

$$10^{27}h = 6.551 \pm 0.13,\ 10^{27}h = 6.547 \pm 0.008 \text{ [эрг/сек]}.$$

Принимая эти данные без всяких сомнений[2], я выбираю второе. Но при этом я никак не исхожу из сведений о том, что 6.547 вероятнее, чем 6.551. Научные результаты не используются подобным образом; если какой-либо вывод зависит от выбора, то исходить следует прежде всего из того, что по всей вероятности ни то, ни другое число не является истинным значением постоянной. Чтобы с разумной степенью вероятности оказаться правым, я должен основываться на интервале значений и поэтому поступаю следующим образом.

Прежде всего я решаю, на какой риск ошибочности я готов пойти, потому что какой-то риск неизбежен при любом обычном законе ошибок[3]. Допустим, что я решаюсь на риск, равный 1/10, что вероятно не выше того, который я обычно беру на себя при формулировании выводов из наблюдений. Теория ошибок говорит мне, что при таком риске я должен буду допускать 2.5 вероятных ошибок[4]. Соответственно, я могу положиться на первое определение постоянной Планка как на определенную гарантию того, что ее значение находится между 6.519 и 6.583, и что, исходя из второго определения, мы получим пределы 6.527 и 6.567. И мне, конечно же, полезнее второе определение, потому что оно сильнее ограничивает требуемое значение, оно оказывается ближе к “более точному” определению и приводит к более четким выводам в намеченных мной заключениях.

Заметим, что *определение* – это не число, а интервал значений, которые могут быть приняты при заданном риске, хоть в обиходе мы часто применяем этот термин к середине интервала. Допускаемый риск будет изменяться в зависимости от цели, с которой применяется определение и от осторожности исследователя. Риск в 1/6, соответствующий двойной вероятной ошибке, применяется, видимо, наиболее часто для обычных целей, хотя моряк, определяя свое положение в море, не согласился бы сажать свой корабль на скалы один раз из шести. Известна и практика допущения лишь одной вероятной ошибки, т. е. молчаливого признания привычки говорить правду лишь через раз.

Таким образом, *наиболее точное определение* следует устанавливать по длине интервала при заданном риске. Впрочем, было бы трудно применить это правило строго в указанной форме. Может случиться, что один из двух сравниваемых методов определения обеспечивает более точный ответ, т. е. более узкие границы, при низком риске, а второй – при высоком. И тогда *наиболее точное определение* останется двусмысленным до тех пор, пока не будет уточнен допускаемый риск. По причинам, указанным ниже, это, хоть вряд ли будет происходить на практике, принуждает принять для теоретических целей упрощенное (обычное) определение, которое не чревато никакими сомнениями.

В качестве наилучшего общего мерила точности x мы принимаем его среднюю квадратическую ошибку[5]. Это во всяком случае окажется подходящим компромиссом между правилами, основанными на низких и на высоких рисках. И его практическая полезность почти та же, что и у интервала, зависящего от риска, который мы в идеале должны были бы предпочесть. Впрочем, есть лучшее обоснование его применения. Каким бы методом мы ни выводили x из наблюдений, он будет обладать кривой плотности ошибок. Это означает, что при учете всех возможных вариантов действия случайных ошибок в наблюденных величинах окончательные ошибки в выведенном значении x следуют указанной кривой. Ее не следует смешивать с кривой плотности ошибок наблюдения. В п. 4 мы покажем, что во всех обычных случаях закон ошибок x примерно нормален, даже когда закон ошибок наблюдений очень далек от гауссова.

И поскольку на практике мы таким образом должны сравнивать определения x с аналогичными и примерно гауссовыми кривыми, двусмысленность оказывается невозможной. Кривые различаются друг от друга лишь по интервалам своих положительных значений[6], а интервал, соответствующий данному риску, высокому или низкому, просто пропорционален средней квадратической ошибке. Ее таким образом можно применять в качестве равноценной меры точности.

Цель теории комбинации наблюдений поэтому состоит в том, чтобы установить метод, определяющий x с наименьшей возможной средней квадратической ошибкой, после чего мы окажемся в состоянии указать наименьший возможный интервал значений, внутри которого при заданном риске допускаемой ошибки, как можно будет утверждать, находится x.

3. Метод решения этой задачи

Рассмотрим задачу установления наиболее точного определения x [определения x, y, z] по системе условных уравнений[7]

$$a_r x + b_r y + c_r z = l_r,\ r = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Здесь l_r известно с ошибкой, подчиняющейся любому симметричному[8] закону, пусть даже сколь угодно отличающемуся от гауссова. Законы ошибок величин l_r не обязательно совпадают, но мы предположим, что средняя квадратическая ошибка ε этих величин одна и та же. В противном случае этого следует прежде всего достичь умножением уравнений на соответствующие множители как при обычном назначении весов[9].

Какой бы метод определения значения x ни принять, оно будет зависеть от измеренных величин l_r, так что x можно считать их функцией. Примем на пробу линейную функцию

$$x = \Sigma\lambda_r l_r \qquad (2)$$

с произвольными множителями λ_r. Подставляя значения l_r из (1), мы получим

$$x = x\Sigma\lambda_r a_r + y\Sigma\lambda_r b_r + z\Sigma\lambda_r c_r. \qquad (3)$$

Это равенство будет удовлетворяться при

$$\Sigma a_r\lambda_r = 1,\ \Sigma b_r\lambda_r = 0,\ \Sigma c_r\lambda_r = 0. \qquad (4)$$

Любое множество величин λ_r, удовлетворяющих условиям (4), приведет к "решению" (2). Это действительно решение, потому что при безошибочно измеренных l_r оно соответствует верному значению x, в противном же случае различные решения могут обладать весьма различной точностью, и нам следует выяснить, какое множество значений λ_r приведет к наиболее точному решению.

Здесь, однако, может возникнуть вопрос, наверняка ли наиболее точное решение можно отыскать среди линейных форм (2). Весьма вероятно, что при некоторых негауссовых законах ошибок существуют более точные нелинейные решения. Но ввиду громадного труда, который тогда окажется необходимым, и редкости случаев, при которых они потребуются, вряд ли можно серьезно считать какие-либо нелинейные методы практичными.

Следует, однако, указать на исключение. При одном-единственном неизвестном, когда исходные уравнения становятся просто наблюдениями x, можно применять "причудливые" и быть может более точные методы. Так, известно, что при законе ошибок вида $e^{-k|\varepsilon|}d\varepsilon$ медиана точнее среднего арифметического по меньшей мере для некоторых рисков[10]. Таков пример решения, которое не содержится в (2).

Пусть ошибки в l_r равны ε_r. Тогда из (2) следует, что

ошибка в x равна $\Sigma\lambda_r\varepsilon_r$ (5)

и, по хорошо известной элементарной теореме, без предположения о нормальности,

средняя квадратическая ошибка величины x равна $\varepsilon\sqrt{\sum\lambda_r^2}$, (6)

где ε – средняя квадратическая ошибка величины l_r (как было сказано, одна и та же для всех l_r).

Таким образом, x определяется с наименьшей среди линейных методов средней квадратической ошибкой при условии

$$\sum\lambda_r^2 = \min$$

и выполнении ограничений (4). Поэтому

$$\Sigma\lambda_r\delta\lambda_r = 0 \qquad (7)$$

для всех вариаций $\delta\lambda_r$, удовлетворяющих условиям

$$\Sigma a_r\delta\lambda_r = \Sigma b_r\delta\lambda_r = \Sigma c_r\delta\lambda_r = 0. \qquad (8)$$

Решение устанавливается методом неопределенных множителей.

[Автор определяет значение x и его среднюю квадратическую ошибку и замечает, что его выводы полностью соответствуют МНКв.[11]]

Таким образом, не предполагая существования нормального закона, мы обосновали МНКв, если только он не связывается с "вероятнейшими значениями". Достоинства этого метода состоят в том, что 1) он приводит к решению, т. е. к верному значению, если только наблюдения точны; 2) он позволяет определить среднюю квадратическую ошибку результата и таким образом показывает, насколько широк интервал значений, в котором находится решение; 3) никакой иной линейный метод (а потому вообще никакой метод, о котором можно было бы всерьез подумать) не привел бы к такой малой средней квадратической ошибке, т. е. к столь узкому интервалу значений x, которому можно было бы довериться с заданным риском. Возможное существование других, еще более точных (нелинейных) методов не должно сильно волновать нас. Практически важнее знать достигнутую точность, чем кудахтать (crow) о ней.

4. Плотность распределения величины *x*

В соответствии с уравнением (5) ошибка величины x составлена из n членов, каждый из которых зависит от ошибки, не зависимой от других, притом при каждом действительно необходимом применении МНКв это число довольно велико. Некоторые коэффициенты λ могут, правда, оказаться сравнительно небольшими, но добрая доля их должна быть примерно одного и того же порядка. На самом деле, если два или три коэффициента намного больше всех остальных, так что только они практически значимы в формуле (2), то это потому, что исследователь включил массу наблюдений, которые фактически не влияют на определение x, хоть и имеют отношение к остальным неизвестным.

В подобных случаях он по существу доверяет двум или трем наблюдениям, а не всем n, как ему кажется. Таким образом, отвлекаясь от явно неподходящих применений МНКв, мы устанавливаем, что ошибка значения x есть результат значительного числа более или менее равной значимости независимых ошибок. Хорошо известно, что при этих условиях результирующая ошибка является примерно гауссовой даже если ее составляющие таковыми не являются. И число наблюдений не должно обязательно быть слишком большим; 6 или 8 приведут к хорошей [достаточно точно приведут] к кривой Гаусса[12].

Важно заметить, что наличие гауссова распределения ошибки определения x обеспечивает лучшую безопасность и бóльшую строгость сравнительно с тем, как если бы то же условие требовалось относительно ошибок наблюдения. Помимо эмпирического свидетельства, единственное "доказательство" гауссова закона ошибок наблюдения основано на предположении о том, что они составлены из многих небольших независимых ошибок, объективных или субъективных[13] [т. е. по центральной предельной теореме]. Возможно, что удастся защитить подобное предположение об ошибках *наблюдателя*, но оно окажется любимой мишенью критика. Намного предпочтительнее предположить, что *вычислитель* объединяет много небольших независимых ошибок, ибо он всегда может исследовать фактические коэффициенты λ и проверить верность этой предпосылки и либо опровергнуть, либо подтвердить мнение критика.

5. Негауссовы ошибки

Несомненно имеет смысл обосновать нашу теорию комбинации наблюдений не ограничиваясь случаем [ошибок] наблюдений, подчиняющихся нормальному распределению, ибо исключения из этого закона нельзя считать совсем уж несущественными. Хорошо известно, что имеет место намного преобладающая причина, которая стремится заставить ошибки наблюдения стать гауссовыми. Менее известна столь же преобладающая причина, а именно сочетание большого числа источников небольших ошибок, т. е. неоднородность наблюдений, которая стремится систематически отклонить их от нормального закона.

Последняя обусловлена наличием исходных данных, собранных от некоторого числа наблюдателей различной квалификации, либо от одного и того же наблюдателя, работавшего при переменных условиях. В таких случаях число и крупных, и мелких ошибок оказывается завышенной по сравнению с нормальным законом, а число промежуточных ошибок – заниженным. Аналитически это проявляется в том, что отношение четвертого момента ко второму превышает то значение, которое оно принимает при гауссовом законе.

Для последнего средняя квадратическая ошибка ε_2 и средний четвертый момент[14] ε_4 определяются по мере точности h в соответствии с соотношениями

$$\varepsilon_2^2 = 1/2h^2,\ \varepsilon_4^4 = 3/4h^4. \qquad (17)$$

Рассмотрим множества n_1, n_2, … ошибок, следующих нормальному закону с мерами точности h_1, h_2, … Для их смеси

$$\varepsilon_2^2 = (\Sigma n_r /2h_r^2) \div \Sigma n_r,\ \varepsilon_4^4 = 3(\Sigma n_r /4h_r^4) \div \Sigma n_r$$

и поэтому

$$(4/3)\ (\varepsilon_4^4 - 3\varepsilon_2^4)\ (\Sigma n_r)^2 = (\Sigma n_r)\ (\Sigma n_r /h_r^4) - (\Sigma n_r /h_r^2)^2 =$$

$$\Sigma n_r n_s\ [(1/h_r^4) + (1/h_s^4) - (2/h_r^2 h_s^2)] = \Sigma n_r n_s\ [(1/h_r^2) - (1/h_s^2)]^2, \quad (18)$$

т. е. положительно и равно нулю при совпадении всех h. В суммах во второй строке переменны и r, и s. И поэтому для закона Гаусса $\varepsilon_4^4 = 3\varepsilon_2^4$, но если собираются ряды наблюдений с различными мерами точности, как это обычно и должно происходить, то $\varepsilon_4^4 > 3\varepsilon_2^4$. Можно было бы подумать, что нормальный закон всё же появится вновь, если сама мера точности h распределяется случайно, но формулы устанавливают, что этого не происходит[15].

6. Упрощенные методы решения

Исследователь имеет право выбрать любое иное множество значений λ_r, удовлетворяющих условиям (4), и так он часто и делает, чтобы сократить объем вычислений. Средняя квадратическая ошибка остается равной (6) и поэтому его решение оказывается обоснованным. По необходимости оно будет менее точным, чем по МНКв [ввиду выбора иных λ_r], но было бы столь же неуместным сказать ему, что он смог бы отыскать более точное значение, проделав, скажем, втрое больше числовых вычислений, как сказать экспериментатору, что он достигнет более точного результата при утроенном числе экспериментов.

Преступление состоит не в неудавшейся попытке достичь наибольшей возможной точности, а в неосновательном притязании на ту, которую вы объявляете установленной. Типичным примером самого распространенного случая, при котором удается уверенно рекомендовать простую замену МНКв, это, видимо, определение периода колебания маятника T по наблюдениям моментов t_r его последовательных прохождений [например, через точку равновесия].

Исходные уравнения здесь имеют вид

$$a + rT = t_r, \ r = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Линейное решение можно получить по сравнению средних из m первых и m последних моментов. Их разность равна $(n - m)T$ при средней квадратической ошибке $\varepsilon\sqrt{2/m}$, так что период T определяется со средней квадратической ошибкой

$$\varepsilon\sqrt{2/m} \div (n - m). \qquad (19)$$

Вес определения (обратно пропорциональный квадрату средней квадратической ошибки) равен поэтому $m(n - m)^2/2$ и максимален при $m = n/3$. Таким образом, наиболее точное решение подобного рода с весом $2n^3/27$ соответствует сравнению средних из первой и последней трети моментов. Вес значения T при вычислениях по МНКв, конечно же, несколько больше, а именно $n(n - 1)(n - 2)/12$, и при большом n соотношение весов равно 8:9. Выполнение дополнительных наблюдений редко бывает так уж затруднительно, чтобы оправдать вычисления по МНКв для достижения столь незначительной выгоды. *Метод третей* обычно полезен, когда требуется определить одно неизвестное по более или менее равномерно распределенным данным[16].

7. Обращенная вероятность

Обычное описание МНКв как способа определения вероятнейшего значения x включает трудно обоснуемое применение обращенной вероятности[17]. Доводы здесь таковы. Обозначим истинные значения неизвестных x_1, y_1, z_1. По величинам v_r мы находим, что ошибки наших наблюдений равнялись ε_1', ε_2', …, ε_n'. Если же истинные значения x_2, y_2, z_2, то ошибки будут равны ε_1'', ε_2'', …, ε_n''. Далее мы видим, что множество ε_1', ε_2', …, ε_n' вероятнее множества ε_1'', ε_2'', …, ε_n'' и, пользуясь обращенной вероятностью, заявляем: раз мы скорее допустили бы ошибки ε_1', ε_2', …, ε_n', чем ε_1'', ε_2'', …, ε_n'', то вероятнее, что истинными значениями являются x_1, y_1, z_1, а не x_2, y_2, z_2.

Но довод о том, что если следствия из предположения А вероятнее следствий из предположения В, то и само первое предположение вероятнее второго, нельзя принимать безоговорочно. Подбросим монету пять раз подряд, и пусть она неизменно выпадет одной и той же стороной. Тогда предположение о том, что обе стороны монеты совпадают окажется намного вероятнее противоположного, но из этого, однако, не следует, что само совпадение сторон тоже вероятнее.

Верно, конечно, что, отрицая указанный вывод, мы руководствуемся не только очевидными результатами, но и личным знанием того, что монеты с одинаковыми сторонами редки. Но суть в том, что задачи на обращенную вероятность заставляют нас учитывать личные знания или предрассудки, т. е. априорные ожидания, иначе же мы просто никак не ответим на них. Возражение против обращенной вероятности состоит не в том, что она неприемлема, а скорее в том, что она бездумна.

В теории МНКв довод обращенной вероятности имеет силу только при условии, что априорно все значения x, y, z считаются равновероятными. Исходя из этого, мы в состоянии ввести дополнительную информацию, предоставленную нашими наблюдениями (которая, конечно же, видоизменяет априорные ожидания) и строго заключить, что x_1, y_1, z_1 вероятнее, чем x_2, y_2, z_2. Но спорить о допустимости указанного предположения совсем не нужно, потому что легко убедиться, что оно не может быть всегда верным.

Некоторые методы определения заряда электрона доставляют линейные исходные уравнения, неизвестной величиной в которых является e, но при других методах ей оказывается e^2. И если все значения e априорно равновероятны, то этого нельзя будет утверждать о e^2. Таков один случай, при котором указанное предположение неверно. Практически интервал значений e, который следует всерьез рассматривать, так узок, что нет никакого ощутимого различия в предположениях об априорной равновероятности значений e, e^2 или любой иной разумной функции от e. Затруднение может и не быть практически существенным, но оно указывает, что предположение, на котором основана обращенная вероятность в обычной теории МНКв, не имеет под собой аксиоматического обоснования[18].

Указанная трудность обычной теории МНКв возникает потому, что она объединяет две различные цели, а именно комбинацию наблюдений и философскую сторону этой задачи. Принятое нами представление этой теории совершенно свободно от этой трудности, потому что оно строго ограничено первой целью. Оно предоставляет решение, например $x = x_0$, со средней квадратической ошибкой μ. И прежде всего мы ощущаем удовлетворение, потому что знаем, что не смогли бы уменьшить μ, приняв любой иной практичный метод. Во-вторых, мы можем рассматривать полученный результат и выводить из него в точности те же следствия, если бы установили x_0 по единственному непосредственному наблюдению, произведенному с той же средней квадратической ошибкой[19].

По существу мы заменили массу сложного материала наблюдений *наилучшим возможным и равноценным единым непосредственным наблюдением* искомой величины. Цель теории комбинации наблюдений таким образом достигнута. Всё, что можно добавить, относилось бы к философской стороне теории, и это сводится к простому вопросу: как обосновать выводы из наблюдения, подверженного ошибке?

Вот принятый мной ответ. Мы никогда не можем быть уверены в наших выводах и поэтому должны стремиться к системе заключений, выводы из которой в среднем ошибочны лишь в $1/q$ случаев. Принятое из наблюдений знание о мире есть функция от q, это ряд карт, которые становятся всё подробнее по мере убывания q и начинаются (с момента $q = \infty$) с одной-единственной карты, заслуживающей полного доверия и совершенно незаполненной. Этот ряд заканчивается (при $q = 0$) картой, загруженной подробностями, лишь бесконечно малая доля которых верна. Я не могу себе представить, как философ мог бы применить такие карты и только утверждаю, что некоторые промежуточные карты (например, при q, заключенным между 5 и 20) могут оказаться весьма полезными для существа, которому пришлось бы отыскивать свой путь в мире.

Некоторые заявляют, что по наблюдениям мы устанавливаем обращенную вероятность истинных значений x, – но что можно будет вывести из этой вероятности?

8. Определение средней квадратической ошибки

После вычисления решения по МНКв обычно определяют среднюю квадратическую ошибку наблюдения по величинам v_r. Я добавлю здесь несколько замечаний, но ограничусь случаем ошибок, подчиняющихся закону Гаусса.

Пусть μ будет средней квадратической ошибкой, непосредственно вычисленной по заданной выборке n ошибок. Можно показать, что плотность распределения μ имеет вид[20]

$$\mu^{n-1}\exp(-n\mu^2/2\varepsilon^2)d\mu, \quad (20)$$

где ε – истинная средняя квадратическая ошибка. То же распределение (20) можно получить по выборке $(n + m)$ величин v_r, где m – число неизвестных. Поэтому среднее значение $\bar{\mu}$ ошибки μ, вычисленное по неограниченному числу таких выборок, будет равно

$$\bar{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^n \exp(-n\mu^2/2\varepsilon^2)d\mu \div \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{n-1}\exp(-n\mu^2/2\varepsilon^2)d\mu \equiv p\varepsilon, \qquad (21)$$

$$p = \sqrt{2/n}\,\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)} < 1. \qquad (22)$$

Иногда спрашивают, следует ли считать μ определением ε или $p\varepsilon$. Можно показать, что квадраты средних квадратических отклонений μ от ε и от $p\varepsilon$ равны соответственно

$$2\varepsilon^2(1-p),\ \varepsilon^2(1-p^2). \qquad (23;\ 24)$$

Поскольку $p < 1$, вторая величина меньше первой и таким образом μ расположено ближе к $p\varepsilon$, чем к ε. Но поскольку $p\varepsilon < \varepsilon$, заданная средняя квадратическая ошибка величины $p\varepsilon$ равносильна бóльшей средней квадратической ошибке величины ε и потому *в относительном смысле* μ ближе к ε. Ибо, приняв $p\varepsilon = \mu$, мы определяем ε со средней квадратической ошибкой $\varepsilon\sqrt{1-p^2} \div p$, а
если принять $\varepsilon = \mu$, то эта ошибка окажется равной (23) и легко показать, что она меньше. И таким образом предпочтительнее считать, что μ определяет ε, а не $p\varepsilon$. Но этот вопрос наверняка не столь важен, и он вряд ли возникнет, если вспомнить, что в любом полезном случае требуется не значение ε, а интервал его значений, которому можно доверять при заданном риске.

9. Вывод ε по μ

В принципе задача о выводах из данного μ та же, что и о выводах из полученного значения x, что мы уже обсуждали. Теоретическое вычисление μ сводит массу наблюдений к одному определению значения ε. Величину μ мы можем рассматривать как отягощенное ошибкой наблюдения непосредственное наблюдение ε. Закон ошибок этой величины не гауссов и фактически немного асимметричен, но он явно задан формулой (20), так что, исходя из него, можно вычислить интервал значений μ, соответствующий любому риску. Практически, однако, имеется отличие между двумя указанными задачами, и происходит оно потому, что при определении x кривая его ошибок предполагается не зависимой от значений x, тогда как при определении ε шкала (scale) кривой его ошибок изменяется пропорционально ε[21]. И, чтобы избежать введения обращенной вероятности, приходится идти несколько окольным путем.

Пусть, как и раньше, мы допускаем риск, равный 1/10. По формуле (20) вычислим такие множители k_1 и k_2 в функции n, чтобы с вероятностью 9/10 μ оказалось в интервале $[\varepsilon/k_1;\ k_2\varepsilon]$. И, получив некоторое μ, мы сможем определить, находится ли ε в пределах $[\mu k_1;\ \mu/k_2]$, или же, что имело место событие с вероятностью 1/10[22]. Таким образом, если по установленным значениям μ определять, находится ли ε в указанных пределах, то вероятность ошибки окажется равной лишь 1/10, т. е., в среднем, ошибки будут случаться 1 раз из десяти.

Есть утонченное отличие между только что сказанным и утверждением о том, что вероятность ε находиться в пределах $[\mu k;\ \mu/k_1]$ равна 9/10. Второе основано на обращенной вероятности, и, вспоминая пример с подбрасыванием монеты, можно определенно сказать, что либо обе ее стороны одинаковы, либо произошло событие, вероятность которого 1/32. Но я не думаю, что кто-нибудь сказал бы, что первое имеет вероятность 31/32. Эта вероятность просто не существует до тех пор, пока нет никаких сведений об априорной частости существования монет с одинаковыми сторонами. И всё же, если игра в орлянку является постоянным занятием, и принято считать, что пять совпадающих исходов при подбрасывании монеты означает, что ее стороны одинаковы, мы ошибемся только, когда произойдет событие, вероятность которого 1/32 и может быть еще реже, если такие монеты существуют. Таким образом, в среднем ошибка произойдет не чаще, чем один раз из 32. Различие происходит между вероятностями определенного суждения и правильного решения по методу, который подвел к нему.

Чтобы закончить: при известном ε известно распределение μ, но вот обратную задачу определения распределения ε по известному μ мы решить не можем. Но это и не требуется, потому что по μ мы в состоянии непосредственно установить интервал для ε при непременном ограничении, что определенная доля наших заключений окажется здесь ошибочной.

10. Совместное исследование *x* и ε

При записи интервала значений x, который можно допустить при заданном риске, мы применяем среднюю квадратическую ошибку этой величины, […][23] которая известна в функции средней квадратической ошибки наблюдения. Но если последняя плохо определена и может быть уточнена лишь в смысле ее интервала (при заданном риске), то возникает сложная задача сочетания рисков в ε и x. Но поскольку для более или менее точного определения ε нужно довольно много величин v_r, это возражение не всегда окажется мелочным. И потому теория (ныне часто предпочитаемая), в соответствии с которой распределение величины x устанавливается непосредственно в функции наблюденной средней квадратической ошибки μ, а не по неопределенной истинной средней квадратической ошибке ε, представляет значительный интерес. Однако, я думаю, что она не обобщена на негауссовы распределения ошибок.

Несомненно логичнее было бы определять x и ε *по одним и тем же данным*, что часто и происходит[24]. Но по отношению к обычной теории МНКв было бы не вполне справедливо считать, что это современное усовершенствование заменило ее. И, уточняя нашу мысль, заметим, что в тех задачах астрономии и геодезии, которые составляют традиционную область приложения теории ошибок, определение ε основывается на гораздо более обширном материале, чем в случае x, так что там эти две задачи раздельны, как предположили и мы. Практически достаточность исходных данных важнее математического изящества. Так, определяя сотню или более параллаксов звезд, астроном обычно вычислял вероятную ошибку каждого по соответствующим значениям v_r. Было понято, что такой подход весьма расточителен по отношению к точности [весьма несовершенен], и в наши дни вероятные ошибки отдельных параллаксов основаны на общем значении ε, которое устанавливается по значениям v_r всего ряда измерений. Таким образом, определение ε основано на материале, стократно превышающем данные для определения x. Поэтому я считал обоснованным отказаться от рассмотрения строгого совместного определения ε и x, полагая, что для теории МНКв эта тема не основная, а побочная[25].

Примечания

1. Наша основная цель достигается в §§ 1 – 6, а в §§ 7 – 10 обсуждаются те мелкие подробности, столь излюбленные чистыми математиками, которыми нельзя полностью пренебречь. А. Э.

2. Автору следовало указать смысл величин 0.13 и 0.008. О. Ш.

3. Мы бы сказали: вообще при любом законе. О. Ш.

4. Соотношение риска и количества вероятных ошибок здесь и чуть ниже соответствует только нормальному распределению. О. Ш.

5. Автор не пояснил, что и для средней квадратической ошибки нет универсального соотношения между ней и принятым риском. О. Ш.

6. Здесь автор применил выражение linear spread, которое, видимо, означает область определения, на самом же деле кривые будут различаться мерами точности (дисперсиями). О. Ш.

7. В теории ошибок подобные уравнения называются уравнениями погрешностей, мы же, не поправляя автора, будем называть их исходными. Записывать их следовало бы с указанием неизбежных остаточных свободных членов v_r, которые автор неоднократно и неверно отождествлял с остающимися неизвестными ошибками измерений. Вместо длинного выражения *остаточные свободные члены исходных уравнений* мы будем писать просто v_r. Наконец, линейность исходных уравнений не была ограничительной: примерные значения неизвестных можно было устанавливать хотя бы по прикидкам. О. Ш.

8. Практические методы обычно разрабатываются таким образом, чтобы обеспечить симметричный закон, например методы reversal и differential measurements. Но ограничение исследований симметричными законами можно заменить иным условием, которое исключило бы систематические ошибки. А. Э.

С этими методами мы не встречались, и вообще неясно, как можно достичь указанной цели. Исключение систематических ошибок тоже ведь нереально. О. Ш.

9. Для приведения уравнений к единому весу каждое из них умножается на корень из своего веса. Впрочем, автор упоминает *назначение* весов, а это неясно. О. Ш.

10. Плотность вероятности записывается без присоединения к ней дифференциала. Оговорка *по меньшей мере* не нужна. О. Ш.

11. В математическом смысле я применил метод Лапласа (1811). Думается, что его положительные качества выявляются только в связи с доводом, к которому я приспособил его. А. Э.

Чуть ниже автор добавил, что он таким образом вывел нормальные уравнения не предполагая закона Гаусса, Он, видимо, не знал, что Гаусс (1823) сделал то же самое столетием раньше. Иными словами, автор мог бы опустить все свои выкладки и на Лапласа не ссылаться. О. Ш.

12. Автор описал условия центральной предельной теоремы, но следовало добавить, что отдельные составляющие не должны оказывать существенного влияния на их сумму. На достаточность весьма небольшого количества составляющих, упомянутую автором ниже, указала и Вентцель (1969, § 13.9, с. 307). О. Ш.

13. Доказательство, основанное на иногда еще вспоминаемом *принципе среднего арифметического*, полностью порочно. А. Э.

Таковым он, стало быть, посчитал вывод Гаусса (1809), основанный на *постулате* (Бертран 1888, с. 176) среднего арифметического. Гаусс (1823), правда, отказался от него, но вовсе не ввиду его математической несостоятельности. Рассуждение автора (ниже) о возможностях вычислителя плохо понятно. О. Ш.

14. Термина средний (mean) момент не существует. Автор имел в виду *начальный* момент. О. Ш.

15. Величина ($\varepsilon_4^4 - 3\varepsilon_2^4$) называется эксцессом (Пирсон, 1905 г.), который может оказаться и отрицательным (автор же рассматривал только обобщенный нормальный закон). В частности (Кемниц 1957), такой эксцесс иногда присущ рядам геодезических измерений, возможно ввиду требуемого инструкциями отбраковки сильно уклоняющихся результатов. Без подобной отбраковки ряды наблюдений действительно могут подчиняться смеси нормальных распределений, на что автор и указал (и что утверждал Ньюком). О. Ш.

16. У автора было: когда требуется определить slope (наклон) или scale-constant (масштаб?). Ни то, ни другое не понятно. О. Ш.

17. *Обычное описание* действительно встретилось у Гаусса (1809), но только в его первоначальном обосновании МНКв, притом использованный им довод обращенной вероятности не был нужен (Уиттекер и Робинсон 1924, с. 219 прим.): постулат среднего арифметического означал, что все результаты измерений были априорно равновероятны. Именно эту равновероятность автор упоминает ниже. Вообще же обращенную вероятность длительное время отрицали, см., например, Dale (1991/1999, с. XII). О. Ш.

18. Бертран (1888, с. 180 – 181) на том же основании возражал против постулата среднего арифметического, однако для обычных геодезических и астрономических задач его критика не была существенна. О. Ш.

19. Но в связи с одним соображением комбинация наблюдений предпочтительнее одного-единственного наблюдения. Исходя из одного наблюдения, обычно довольно условно считают закон его ошибок гауссовым, однако в § 4 было сказано, что гораздо безопаснее то, что примерно гауссовым является закон ошибок величины x_0. А. Э.

20. Дифференциал не следовало включать в плотность, ср. Прим. 10, а кроме того отсутствует числовой множитель; он, правда, для формулы (21) не нужен. Обозначения аргумента и средней квадратической ошибки совпадали, и мы заменили μ в формулах (20) и (21) на x. Пределы интегралов должны были бы быть 0 и ∞, хотя по существу следовало бы вообще принять небольшой реальный интервал изменения переменной.

Интегралы в формуле (21) однотипны, их можно отыскать во многих справочниках. Числитель, например, равен

$$\Gamma[\frac{n+1}{2}]\,/\,2a^{[(n+1)/2]},$$

где a – коэффициент при $-x^2$. Тот же самый коэффициент и у знаменателя, потому что замена n на $(n-1)$ должна касаться только показателя степени множителя при экспоненциальной функции. Иными словами, дробь (21) вообще не будет зависеть от ε, и дальнейшие рассуждения автора не имели смысла. О. Ш.

21. Это неясное утверждение возможно означает, что функция (20) зависит от ε, пропорциональность же тогда следует понимать в самом широком смысле. О. Ш.

22. Изящнее было бы выбрать k_1 и k_2 так, чтобы μ оказалось в интервале $[k_1\varepsilon; k_2\varepsilon]$. О. Ш.

23. Автор применил здесь обозначения из опущенной нами части п. 3, но оценку точности неизвестных, вычисленных по МНКв, предложил уже Гаусс (1823), ср. Прим. 24. О. Ш.

24. Гаусс (1823) предложил метод оценки точности вычисленных по МНКв неизвестных параллельно с решением нормальных уравнений. Не менее чем в трех письмах он описывал свои наблюдения на нескольких станциях, по которым он выводил единое значение средней квадратической ошибки наблюдений (Шейнин 2007, с. 93). Аналогично поступил Лаплас в Третьем дополнении к *Аналитической теории вероятностей.* О. Ш.

25. Следует обсуждение доклада, на основании которого написана статья автора. Была отмечена неопределенность выражений, о которой см. Прим. 2. J. Guild справедливо заметил, что термин *вероятная ошибка* оказался “источником существенной путаницы” и что систематические ошибки (о которых автор почти ничего не сказал) весьма опасны. Он же упомянул, что Campbell (1928) отрицает гауссову теорию ошибок (точнее: МНКв), – также не подозревая о существовании мемуара Гаусса (1823). Кемпбелл также участвовал в обсуждении, но ничего интересного не сказал. О. Ш.

Библиография

Вентцель Е. С. (1969), *Теория вероятностей.* М.

Кемниц Ю. В. (1957), О функции распределения ошибок измерений. *Геод. и картография*, № 10, с. 21 – 29.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1994), Gauss and geodetic observations. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 46, pp. 253 – 283.

--- (2007), *История теории ошибок*. Берлин. Также www.sheynin.de

Bertrand J. (1888), *Calcul des probabilités*. Второе изд. 1907, перепечатка Нью-Йорк, 1970, 1972.

Campbell N. R. (1928), *An Account of the Principles of Measurement and Calculations*. London.

Dale A. I. (1991), *History of Inverse Probability*. New York, 1999.

Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1809, нем.), Теория движения и т. д. В книге автора (1957, с. 89 – 109).

--- (1823, латин.), Теория комбинаций наблюдения. Там же, с. 17 – 57.

--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Laplace P. S. (1811), Sur les intégrales définies. *Oeuvr. Compl.*, t. 12. Paris, 1898, pp. 357 – 412.

Whittacker E. T., Robinson G., Уиттекер Э., Робинсон Г. (1924), *Calculus of Observations*. London. Много других изданий. Также *Математическая обработка результатов наблюдений*. М., 1935.

XVII

Ч. Эйзенхарт

Метод наименьших квадратов: что такое “наименьших”?[1]

Ch. Eisenhart, The meaning of “least” in least squares

J. Washington Acad. Sci., vol. 54, 1964, pp. 24 – 33

От переводчика

Предлагаемая статья интересна уже потому, что была, видимо, первой за многие десятилетия по истории теории ошибок, если, конечно, не считать не известной автору книги Идельсона (1947). Очень многое нам с тех пор удалось выяснить дополнительно и/или уточнить, см. наши книги, включенные в Библиографию. Вот наши основные замечания.

Из фундаментального сочинения Кеплера 1609 г. следует, что среднее арифметическое действительно стало к тому времени общепризнанным. Первоначальный вариант мемуара Даниила Бернулли (существенно отличавшийся от опубликованного текста) существовал уже в 1769 г. В 1809 г. Гаусс использовал принцип обращенной вероятности, но вполне мог бы обойтись без него: принцип среднего арифметического уже означал априорную равновероятность всех наблюдений (Whittaker & Robinson 1924). Гаусс не мог удовлетвориться своим первым обоснованием метода наименьших квадратов (МНКв) уже потому, что закон ошибок оказывался универсальным, и странно, что Пуанкаре этого не признал. Теория ошибок Лапласа оказалась практически бесполезной, потому что была основана на существовании большого числа наблюдений и применяла принцип минимума абсолютного ожидания погрешности, приемлемый с вычислительной точки зрения лишь при нормальном распределении. Наконец, по поводу роли нормального распределения в МНКв см. Петров (1954).

Следовало указать, что обработка наблюдений в общем случае означает уравнивание несовместной системы линейных уравнений с m неизвестными и измеренными свободными членами l_i:

$$a_ix + b_iy + \ldots + l_i = v_i.$$

Уравнивание сводится к установлению таких значений для неизвестных, при которых неизбежные остаточные члены v_i окажутся достаточно малыми. Вероятностные представления привлекаются здесь дополнительно для того, чтобы уравнивание приводило к оптимальному в каком-то смысле решению. В частном случае непосредственных измерений

$$x + l_i = v_i.$$

1. Введение

В наши дни все применяют (МНКв), но не вполне тем же самым образом и не с одной и той же целью. В этом есть некоторая аналогия с нынешним состоянием теории вероятностей, про которую Рассел (1948, с. 344) заметил: "Истолкование в этой области спорно, однако сами математические рассуждения обладают той же мерой согласия, как и в любой другой ветви математики".

И всё-таки положение с МНКв не совсем схоже с только что описанным. Существует полное согласие в способе составления *нормальных уравнений* из основных [исходных] уравнений, и каждый вычислитель получает одно и то же решение их системы. Но причины для применения МНКв, понимание его целей и условий, при которых они достигаются, равно как и истолкование его конечных результатов могут быть совсем различными.

Более того, в отличие от положения в теории вероятностей, те, кто применяет МНКв как средство в своей собственной работе, обычно не знают об иных его формулировках. Это несколько странное обстоятельство вызвано тем, что первоначально МНКв был развит, исходя из трех заметно отличающихся друг от друга точек зрения:

1) Наименьшая сумма квадратов остаточных свободных членов (Лежандр 1805).
2) Наивысшая вероятность безошибочности оценивания (Гаусс 1809).
3) Наименьшая средняя квадратическая ошибка оценивания (Гаусс 1823).

Различие здесь не только в целях или исходных предпосылках, но и в значении, которое придается совпадающим ответам на любую задачу.

К сожалению, существование указанных различных формулирований и, соответственно, истолкований окончательного ответа при применении МНКв редко упоминается в руководствах по его практическому применению. Единственное известное мне на английском языке исключение представляет книга Уиттекера и Робинсона (1924). В ее гл. 9-й обсуждается первоначальная формулировка Лежандра, в которой не было никаких вероятностных рассуждений; полностью рассматривается первое обоснование Гаусса, в котором главную и незаменимую роль играет нормальное распределение, как мы теперь его называем; и кратко описывается второе гауссово обоснование, которое, как он доказал, не зависит от формы закона ошибок, если только "наилучшие значения" в смысле Лежандра являются линейными функциями наблюдений.

Сам Гаусс решительно предпочитал свое второе обоснование, чье существование, видимо, по существу никому из американцев, применяющих МНКв, не известно, за исключением изучивших повышенный курс математической статистики.

2. Сведение к минимуму остаточных свободных членов и МНКв по Лежандру

МНКв был разработан в начале XIX в. в ответ на осознанную необходимость в "наилучшем" общем способе сочетания наблюдений в астрономии и геодезии […]. Фактические *ошибки* отдельных измерений обычно неизвестны и таковыми же остаются навсегда. Ранние попытки добиться хорошего уравнивания были, видимо, сосредоточены на сведении к минимуму противоречий в системе наблюдений, которые усматривались по некоторой простой функции их остаточных свободных членов.

Практическая потребность в единственности решения и простоте вычислений, конечно же, в должное время привела к процедуре установления *наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов*. Таков был в сущности Лежандров МНКв (1805). Никаких вероятностных рассуждений в нем не было[2]. И вот как развивался МНКв.

1. Если имелись "одинаково доброкачественные" наблюдения одной и той же величины, то принцип арифметической средины утверждал, что "лучше всего" было бы принимать их среднее арифметическое. При этом сумма уклонений наблюдений от среднего оказывалась равной нулю.

Этот принцип видимо возник в Западной Европе во второй половине XVI в.; как кажется, он появился по аналогии с методом парных наблюдений, искаженных систематическими ошибками (примерно) равной величины и противоположными по знаку, так что среднее из пары оказывалось по меньшей мере частично свободно от их действия.

2. Котс (1722) решил, что в случае нескольких определений одной и той же величины, искаженных неравными неопределенностями, ее "наилучшее"значение окажется взвешенным средним арифметическим с весами "обратно пропорциональными смещениям, на которые могут распространяться ошибки" [соответствующих определений][3].

3. [Предложение Котса означает, что "лучшее" значение измеренной величины соответствует центру тяжести наблюдений.]

4. Эйлер (1749)[4] и Майер (1750) независимо друг от друга обобщили метод Котса на случай нескольких искомых величин, предложив то, что сейчас называется методом средних. Он состоит в разделении исходных уравнений на части по числу неизвестных и замене каждой из них единым суммарным уравнением, сумма остаточных свободных членов в котором принимается равной нулю.

Таким образом, метод средних всегда доставлял значение каждого неизвестного, хотя ему обычно и была присуща некоторая неопределенность при разделе исходной системы на части и, соответственно, в получаемом решении. Разделение производилось с учетом величины коэффициентов при неизвестных.

5. Чтобы преодолеть указанную неопределенность, Бошкович (1757) предложил для случая двух неизвестных решать систему с искомыми параметрами a и b вида

$$y_i = a + bx_i$$

под двумя условиями:

1) Суммы положительных и отрицательных остаточных свободных членов должны быть равны.

2) Сумма абсолютных значений этих величин должна быть наименьшей.

Первое условие означает, что наилучшая прямая должна проходить через центр тяжести точек наблюдения (x_i; y_i), а оба условия, вместе взятые, – что тангенс угла наклона прямой b должен удовлетворять уравнению

$$\sum |(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x})| = \min, \qquad (1)$$

после чего можно будет определить $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

Бошкович (1757, с. 353 – 396) впервые сформулировал и применил эти условия для определения наилучшей прямой в сводке и оценке измерения градусного измерения возле Рима, произведенного Христофором Мейром и им самим и впервые опубликованного в 1755 г. Никакого указания на метод решения уравнения (1) он не оставил[5].

Через три года, в комментарии к поэме Stay (1760, т. 2), он снова сформулировал свои условия и привел весьма полезное правило для решения уравнения (1) с геометрическим обоснованием и подробным примером. Краткое изложение этого см. в нашей статье (1961).

6. Лаплас (1786) в своем первом мемуаре о фигуре Земли предложил проверять возможность линейному уравнению $y = a + bx$ описывать данные наблюдения, т. е. выбирать значения a и b так, чтобы *свести к минимуму абсолютное значение наибольшего уклонения* и затем субъективно решать, соответствует ли это уклонение установленной неопределенности в исходных данных[6]. Он также набросал правило для отыскания этих значений.

В своем втором мемуаре на ту же тему Лаплас (1792) принял условия Бошковича и сформулировал вывод его правила на алгебраическом языке. В *Небесной механике* он (1799, т. 2, кн. 3, гл. 5, с. 417 – 424) снова, как и в мемуаре 1786 г., описал метод решения и затем (с. 424 – 434) предложил иной метод для случая большого числа наблюдений. Там же он (с. 438 – 442) обобщил свою алгебраическую формулировку метода Бошковича на случай неравноточных наблюдений.

7. В 1795 г., в возрасте 18 лет, Гаусс, математически равный Архимеду и Ньютону, и несравнимый по своему раннему математическому развитию, обнаружил алгебраические и арифметические преимущества правила *наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов* для уравнивания наблюдений в геодезии.

Вначале Гаусс не придавал особого значения МНКВ, полагая, что он настолько естественен, что им должны были пользоваться многие из тех, кто занимался численными вычислениями. Часто он говаривал, что был бы готов биться об заклад о том, что Тобиас Майер применял его. Позднее, исследовав бумаги этого астронома, он обнаружил, что проиграл бы пари (Dunnington 1955, с. 113).

Это частично объясняет, почему более 10 лет Гаусс ничего не публиковал о МНКв, хоть и применял его почти ежедневно с 1801 г. в весьма разнообразных астрономических вычислениях (Гаусс 1821/1957, с. 143).

8. Лежандр (1805) обнародовал процедуру вычисления *наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов*. В Приложении к этому сочинению он (с. 72 – 73/2007а, с. 74) написал:

Из всех принципов, которые могут быть предложены, нет, как я полагаю, более точного или простого в применении, чем тот, который мы использовали в настоящей работе. Он состоит в том, чтобы привести к минимуму сумму квадратов ошибок. Этот метод устанавливает своего рода равновесие между ошибками, которое, поскольку оно не позволяет преобладать крайним, подходит для выявления состояния системы, наиболее приближающейся к истине.

Затем Лежандр вывел ныне хорошо известные правила для составления так называемых нормальных уравнений и показал, что принцип среднего арифметического является частным случаем его метода[7]. К сожалению, по всему изложению он применил термин *ошибки* вместо более точного *остаточные свободные члены*. Это смущало неосторожных и скрывало различие между тем, что он лишь утверждал в 1805 г., и тем, что является статистическим свойством метода (Гаусс 1823).

Вот суть сказанного Лежандром. Если для объективного уравнивания сводятся к минимуму взаимные несоответствия наблюдений, о которых свидетельствует некоторая простая функция их остаточных свободных членов, то практические потребности общности приложимости, единственности арифметических решений и несложности вычислений приводят к принятию метода *наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов*. Никаких вероятностных рассмотрений здесь не было. И его "открытие" просто ознаменовало собой высшую точку попыток Эйлера, Майера, Бошковича, Лапласа и других выработать практичный и объективный метод уравнивания, основанный исключительно на рассмотрении остаточных свободных членов.

3. "Законы ошибок" и первое обоснование МНКв (Гаусс 1809)

По определению, ошибка наблюдения – это разность между ним и истинным значением измеряемой величины. Для данного наблюдения это – некоторое определенное число, ни численное значение которого, ни его знак обычно не известны и не могут быть известны, ибо таково и истинное значение.

Математическая теория ошибок невозможна до тех пор, пока каждое наблюдение считается существующим само по себе. Она становится возможной только тогда, когда наблюдения считаются частными значениями, характеризующими возможные результаты, доставленные при тех же обстоятельствах тем же методом наблюдений.

Подобный основополагающий шаг сделал Симпсон (1756, с. 64/2006, с. 116), профессор математики военной академии:

Хорошо известно, что метод вычисления среднего из нескольких наблюдений, практикуемый астрономами, чтобы уменьшить погрешность, возникающую ввиду несовершенства инструментов и органов чувств, не был воспринят единодушно. Некоторые весьма известные лица считали, и даже публично утверждали, что одному-единственному наблюдению, выполненному с должными предосторожностями, следует доверять настолько же, насколько среднему из большого числа наблюдений.

Так как этот вопрос представлялся мне весьма важным, я почувствовал сильное желание испробовать, нельзя ли будет несколько прояснить его, применив математические принципы, так, чтобы выявить выгоду и пользу практикуемого метода с более высокой степенью очевидности.

Исполняя свое намерение […], *я был действительно вынужден воспользоваться предположением и допустить, что некоторый ряд чисел выражает соответствующие шансы различных ошибок, которым подвержено каждое данное наблюдение.* […]

Если предположение, которое я ввел, не покажется […] *столь хорошо выбранным, как быть может иные, оно всё же будет достаточным, чтобы соответствовать желаемой цели. И после вычислений* […] *обнаружится, что какой бы ряд ни принять для шансов появления различных ошибок, результат окажется в большой степени в пользу ныне практикуемого метода среднего значения*.

Первое предположение состояло в том, что значениями *ошибок* измерений одной и той же величины могут считаться равновероятные числа

$$-v, -v+1, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, v-1, v,$$

т. е., что ошибки подчиняются *дискретному равномерному распределению*. В дальнейшем Симпсон предположил, что вероятности тех же значений ошибок пропорциональны числам

$$1, 2, \ldots, v-1, v, v+1, v, \ldots, 2, 1,$$

т. е., что ошибки следуют *дискретному треугольному распределению*. Применяя производящие функции вслед за Муавром (1718), который исследовал задачи, связанные с бросками игральных костей и с другими азартными играми, Симпсон вывел для каждого из указанных распределений закон распределения суммы n независимых ошибок, а затем и соответственные распределения среднего арифметического. Вот его заключительное утверждение:

В общем, оказывается, что выбор среднего арифметического из некоторого числа наблюдений в большой степени уменьшает шансы всех небольших ошибок и отсекает почти всякую возможность любых крупных ошибок. Одно это последнее обстоятельство представляется достаточным, чтобы рекомендовать применение метода среднего арифметического не только астрономам, но вообще всем, имеющим дело с опытами […] *и чем больше сделано наблюдений или опытов, тем меньше наше заключение будет ошибочно*.

Во второй статье Симпсон (1757) вывел закон распределения для среднего из n независимых ошибок, распределенных по *непрерывному треугольному распределению*. Для этого он совершил предельный переход, полагая, что зафиксированный интервал между значениями ошибок стремится к нулю.

Заметим, что Симпсон доказал, что среднее арифметическое благоприятно, а вопрос о его соответствии наилучшему выбору остался открытым. Но при этом он достиг намного более важной цели, смело посчитав, что ошибки не являются случайными отдельными результатами, а отражают свойства самого процесса наблюдений и наблюдателя. Он тем самым проложил путь математической теории измерения, основанной на математической теории вероятностей.

Идея Симпсона о вероятностном распределении ошибок была быстро подхвачена на континенте Европы. Лагранж (1776), итальянец по рождению, немец по официальному положению и француз по выбору, вообще же – один из самых великих математиков всех времен, повторил и обобщил результаты Симпсона, хотя и не упомянул его.

Не применяя предельного перехода, он (как впоследствии многие другие авторы) вывел распределение среднего арифметического из n независимых ошибок, распределенных по *непрерывному равномерному закону*.

Даниил Бернулли, племянник Якоба Бернулли, *Искусство предположений* которого явилось одним из великих достижений в истории теории вероятностей, опубликовал весьма оригинальный мемуар (1778), рукопись которого, видимо, существовала уже в 1774 г. (Laplace 1774, Задача № 3). В своем мемуаре он

1) Предложил *закон ошибок в виде полуокружности*

$$f(x) = \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\,,\ -a \le x \le a,$$

где a – пределы, за которые ошибки никогда не выйдут и x – погрешность наблюдения.

2) Рекомендовал приводить к максимуму произведение

$$\left[\frac{2}{\pi a^2}\right]^n \prod \sqrt{a^2 - (x_i - \mu)^2}$$

с тем, чтобы по наблюдениям x_i вычислить "вероятнейшее" истинное значение искомой величины μ. В наши дни мы назвали бы получаемое значение μ его *оценкой наибольшего правдоподобия*.

При трех наблюдениях оказалось необходимым решить уравнение пятой степени с 20 членами, а при большем их числе вычисления практически невозможны. Тем не менее, Бернулли доказал, что при трех наблюдениях x_1, x_2, x_3, $x_1 \le x_2 \le x_3$, "вероятнейшее" значение μ больше, равно или меньше среднего арифметического, если, соответственно, среднее наблюдение меньше, равно или больше. чем $(x_1 + x_3)/2$.

Таким образом, более удаленное из крайних наблюдений получало больший вес. Но разность между получаемой оценкой и средним арифметическим зависела от выбора a, т. е. наибольшей возможной ошибки. При $a \to \infty$ эта разность быстро стремится к нулю, и Бернулли заметил по этому поводу в последних строках мемуара:

Тем, кто в наибольшей степени потрясен нашими принципами, не придется ничего больше опровергать, лишь прими они, что поле возможных уклонений так велико [широко]*, как только возможно*.

В своем первом исследовании задачи о "наилучшем среднем" Лаплас (1774) предложил

1) *Двойной экспоненциальный закон ошибок*

$$f(x) = (m/2)e^{-m|x|}, -\infty < x < \infty.$$

2) "Наилучшее среднее" в виде такой функции (в случае трех наблюдений), для которой среднее абсолютное значение его уклонения от истинного значения измеряемой величины является наименьшим.

Мы бы сейчас назвали это среднее оценкой *наименьшей средней абсолютной ошибки* μ. Для трех наблюдений x_1, x_2, x_3, $x_1 \le x_2 \le x_3$ эта оценка больше, равна или меньше, чем x_2, т. е. чем *медиана*, если, соответственно, медиана меньше, равна или больше, чем $(x_1 + x_3)/2$. Таким образом, его оценка является "исправленной медианой" с поправкой в направлении боле удаленного из двух крайних наблюдений. Более того, эта оценка стремится к медиане при $m \to \infty$, т. е. при очень высокой точности, и к среднему арифметическому при $m \to 0$, т. е. при очень низкой точности.

Итак, Симпсон и Лагранж показали, что среднее арифметическое становится всё лучше при $n \to \infty$, тогда как Даниил Бернулли и Лаплас установили, что оно оказывается "наилучшим" только в предельном случае бесконечно низкой точности.

Выше мы указали, что Гаусс обнаружил существование алгебраического и арифметического преимущества метода наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов в 1795 г. В 1797 г. он попытался обосновать его исчислением вероятностей и заключил в своем авторском сообщении (1821/1957, с. 143), что определение "вероятнейших" значений неизвестных невозможно без явного знания закона ошибок. Он продолжал:

Но так как этого нет, то ничего не остается больше, как принять такую функцию условно. Ему казалось, что наиболее естественно сперва избрать обратный путь и поискать функцию, которую следует положить в основу рассуждений, если из нее должно вытекать общепризнанное удовлетворительное правило для всех простейших случаев на практике, именно, что среднее арифметическое из многих найденных *значений одной и той же неизвестной величины, полученных из наблюдений одинаковой достоверности, должно считаться вероятнейшим*.

К июню 1798 г. Гаусс (Dunnington 1955, с. 113) закончил свое, ныне знаменитое, обоснование МНКв, в котором он

1) Принял в качестве постулата принцип среднего арифметического.

2) Принял идею о том, что повторение наблюдений приводит к появлению *вероятностного распределения ошибок*.

3) Применил *метод Бейеса обращенной вероятности*, хоть и без ссылки на автора метода.

Исходя из этих положений, он показал, что если среднее арифметическое из независимых измерений одной и той же величины следует считать ее вероятнейшим *апостериорным* значением, то погрешности отдельных измерений должны быть распределены по закону ошибок

$$f(x) = (h/\sqrt{\pi})\exp(-h^2x^2),\ -\infty < x < \infty.$$

Затем он показал, что если ошибки распределены нормально, а неизвестные значения существенных параметров *распределены априорно равномерно*, то вероятнейшие значения неизвестных, соответствующие данному исходному множеству измерений, определяются по принципу наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов. Впрочем, этот результат он не опубликовал вплоть до 1809 г. в *Теории движения*, в 3-м разделе кн. 2-й.

Гаусс (1809, § 179) отчетливо представлял себе, что его вывод ныне знаменитого закона ошибок и последующее обоснование МНКв было не более, чем обобщением принципа среднего арифметического[8], и сохраняло или теряло силу вместе с ним:

Вероятнейшая система значений неизвестных […] *получится тогда, когда квадраты разностей между наблюденными и вычисленными значениями функций* […] *дают наименьшую возможную сумму.* […] *Этот принцип* […] *должен считаться за аксиому, подобно тому, как и среднее арифметическое из многих наблюденных значений одной и той же величины принимается за ее наиболее вероятное значение.*

И всё же его исследование остается примечательным, потому что он (там же, § 178) понимал, что “постоянная h может рассматриваться как мера точности наблюдений”, а затем привел

1) Формулу для точности линейной функции независимых равноточных или неравноточных наблюдений[9].

2) Правило для взвешивания наблюдений различной точности, доставляющие результат с наивысшей точностью [в § 179].

Таковы непреходящие достижения его первого обоснования.

Почти сразу же Лаплас (1809) существенно усилил первое гауссово обоснование, обнаружив, что при соответствующем нормировании и весьма общих условиях (которые он не рассмотрел в их полной общности) распределения линейных функций, а потому и среднего арифметического из n независимых ошибок могут быть приближенно представлены гауссовым законом ошибок, притом с погрешностью, стремящейся к нулю при $n \to \infty$.

Отсюда следовало, что “при очень общих условиях” МНКв в разработке Гаусса приводит к вероятнейшим значениям, когда число независимых наблюдений велико. И этот метод начал считаться прочно установленным не только ввиду его алгебраического и арифметического удобства, но и в силу исчисления вероятностей, по крайней мере при большом числе наблюдений.

4. Наименьшие ошибки оценивания. Второе гауссово обоснование

Выше мы заметили, что Лаплас (1774) рекомендовал в качестве "лучшего среднего" в практической астрономии такую функцию наблюдений, при которой существует равная вероятность уклониться в каждую сторону от истинного значения; показал, что это равносильно выбору принципа *наименьшей средней абсолютной погрешности оценки*; и предложил правило для определения этой функции в случае трех наблюдений и одного неизвестного параметра. В соответствии с его правилом, наилучшее среднее определялось абсциссой, которая делит пополам площадь "под" кривой

$$f(x_1 - \mu)\, f(x_2 - \mu)\, f(x_3 - \mu).$$

Здесь $f(x)$ – соответствующий закон ошибок и произведение рассматривается как функция μ.

Лаплас (1781) обобщил свои результаты на случай n независимых наблюдений и назвал свой метод оценивания "наиболее благоприятным". Его подход был заново открыт и полностью исследован (Pitman 1939). К сожалению, за исключением весьма особых распределений он обычно приводит к неподатливым уравнениям.

Так, Лаплас (1811) установил, что среди всех законов ошибок вида

$$f(x) = K\exp[-\psi(x-\mu)^2],$$

где $\psi(x^2)$ – произвольная четная функция, лишь при одном-единственном законе Гаусса среднее арифметическое из n независимых наблюдений является "самой благоприятной" оценкой μ.

Гаусс (1823) предложил принцип *наименьшей средней квадратической ошибки* и поставил условие [несмещенности]: при полностью безошибочных наблюдениях "наилучшее среднее" должно приводить к истинным значениям неизвестных. Он показал, что если "наилучшие значения" является линейными функциями наблюдений, то они совпадают с теми, которые предоставляет метод наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов (и потому могут быть вычислены) и что в этом важном случае принцип наименьшей средней квадратической ошибки полностью независим от закона ошибок.

Это обстоятельство, которое математическая статистика сегодня выражает как свойство МНКв обеспечивать при "очень общих условиях" *линейные несмещенные оценки неизвестных величин с наименьшими дисперсиями*. Многие нынешние статистики считают это <u>действительным</u> теоретическим основанием МНКв.

Пуанкаре (1896/1912, с. 188; перевод, с. 154) заметил, что

Этот способ оправдать выбор среднего независимо от закона распределения ошибок является, так сказать, опровержением рассуждений Гаусса […]. *Достаточно странно, что этим опровержением мы обязаны самому Гауссу*.

И равным образом странно, что указанное свойство МНКв видимо остается неизвестным многим, сегодня использующим его.

5. Заключительные соображения

Стойкое выживание МНКв в качестве полезного орудия прикладной науки несомненно частично обусловлено алгебраическими и арифметическими преимуществами наименьшей суммы квадратов остаточных свободных членов, частично же вызвано тем, что в случае линейной функции измерений он приводит к оценкам с наименьшей средней квадратической ошибкой. Это взаимнооднозначное соответствие между приведением к минимуму некоторой функции этих остаточных свободных членов и той же функции ошибок оценивания видимо является исключительным свойством МНКв. И хотя он приводит к наилучшим оценкам неизвестных параметров только в случае закона Гаусса, он обычно обеспечивает почти наилучшие оценки, если только число наблюдений намного превышает число определяемых параметров.

Примечания

1. Извлечения из подготавливаемой статьи The background and evolution of the method of least squares. Ч. Э. Первоначальный вариант статьи, которая так и не была опубликована, была прочтена еще в 1963 г. О. Ш.

2. В 1814 г. Лежандр перепечатал свое исследование, указав в заглавии, что МНКв обеспечивает вероятнейшие результаты, что и указано в нашем переводе этой перепечатки. Указанное изменение Лежандр мог сделать только, если имел в виду результаты Лапласа (или Гаусса, которого он, правда, обвинил в присвоении своего открытия МНКв). О. Ш.

3. Оставалось неясным, как именно назначались эти веса. О. Ш.

4. Эйлер применил этот метод лишь вскользь и в простейшем случае. О. Ш.

5. См. Cubranic (1961). О. Ш.

6. Условие, принятое Лапласом, определяло *принцип минимакса*. О. Ш.

7. Лежандр ошибочно утверждал, правда, лишь косвенно, что МНКв включает принцип минимакса. О. Ш.

8. Это неверно: нельзя сравнивать вероятностное доказательство (к тому же ставшее широчайше известным) с аксиомой. О. Ш.

9. Это Гаусс опубликовал только в 1823 г. О. Ш.

Библиография

Идельсон Н. И. (1947), *Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений*. М.

Петров В. В. (1954), О методе наименьших квадратов и его экстремальных свойствах. *Успехи математич. наук*, т. 1, с. 41 – 62.

Шейнин О. Б. (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007a), *Вторая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007b), *История теории ошибок*. Берлин. Также www.sheynin.de

Bernoulli D., Бернулли Д. (1778, латин.). Англ. перевод: The most probable choice between several discrepant observations etc. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 1 – 13. Также в книге Pearson E. S., Kendall M. G., ред. *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, 1970, pp. 157 – 167. Русск. перевод с английского: Наиболее благоприятный выбор из нескольких не согласующихся друг с другом наблюдений и т. д. В книге Шейнин (2006, с. 237 – 254).

Boscovich R. J. (1757), De Litteraria Expeditione etc. *Bononiensi Scientiarum et Artum Instituto atque Academia Commentarii*, t. 4, pp. 353 – 396.

Cotes R. (1722), Aestimatio errorum in mixta mathesis etc. *Opera misc.* Cambridge, 1768, pp. 10 – 58.

Cubranic N. (1961), *Geodetski rad R. Boscovica.* Zagreb.

De Moivre A. (1718), *Doctrine of Chances*. Последующие издания: 1738, 1756. Перепечатка последнего издания: Нью-Йорк, 1967.

Dunnington G. W. (1955), *C. F. Gauss: Titan of Science.* New York. [New York, 2004.]

Eisenhart C. (1961), Boscovich and the combination of observations. В книге L. L. Whyte, ред., *Boscovich: Studies of His Life and Work.* London. Гл. 7-я.
Euler L. (1749), Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. *Opera Omnia*, ser. 2, t. 25. Turici [Zürich], 1960, pp. 45 – 157.
Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1809, латин.), Теория движения. В книге автора Гаусс (1957, с. 89 – 109).
--- (1821, нем.), Авторское сообщение о сочинении Гаусс (1823). Там же, с. 141 – 144.
--- (1823, латин.), Теория комбинаций наблюдений. Там же, с. 17 – 57.
--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.
Lagrange J. L. (1776), Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. *Oeuvr. Compl.*, t. 2. Paris, 1868, pp. 173 – 234.
Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.
--- (1781), Sur les probabilités. *Oeuvr. compl.*, t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485.
--- (1786), Sur la figure de la Terre. *Oeuvr. Compl.*, t. 11. Paris, 1895, pp. 3 – 32.
--- (1792), Sur les degrés mesurés des méridiens et sur les longueurs observées sur pendule. Там же, pp. 493 – 516.
--- (1799), *Traité de Mécanique Céleste*, t. 2. *Oeuvr. Compl.*, t. 2. Paris, 1878.
--- (1809), Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres etc. *Oeuvr. Compl.*, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345.
--- (1811), Sur les intégrales définies etc. Там же, pp. 357 – 412.
Legendre A. M., Лежандр А. М. (1805), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.* Appendix: Sur la méthode du moindres quarres. Paris, pp. 72 – 80. Метод наименьших квадратов для определения вероятнейшего среднего из результатов различающихся наблюдений. В книге Шейнин (2007а, с. 73 – 77).
Mayer J. T. (1750), Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe. *Kosmogr. Nachrichten und Sammlungen*, Bd. 1, pp. 52 – 183.
Pitman E. J. C. (1939), The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form. *Biometrika*, vol. 30, pp. 391 – 421.
Poincaré H., Пуанкаре А. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912. Перепечатка: Sceaux, 1987. Перевод: *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.
Russell B. (1948), *Human Knowledge: Its Scope and Limits*. New York.
Simpson T., Симпсон Т. (1756 – 1757), On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 49, pp. 82 – 93. Чуть измененное название в книге автора *Misc. Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects etc*. London, 1757, pp. 64 – 75. Перевод обоих вариантов:
О пользе выбора среднего из нескольких наблюдений в практической астрономии. В книге Шейнин (2006, с. 115 – 129.
Stay B. (1760), *Philosophiae Recentioris* etc., t. 2. Romae. С комментариями Бошковича.
Whittaker E. T., Robinson G., Уиттекер Э., Робинсон Г. (1924), *The Calculus of Observations*. Несколько последующих изданий. *Математическая обработка результатов наблюдений.* М., 1935.

Приложения

XVIII

С. Ньюком

Абстрактная наука в Соединенных штатах, 1776 – 1876

S. Newcomb, Abstract sciences in America, 1776 – 1876
North Amer. Rev., vol. 122, 1876, pp. 88 – 123

От переводчика

Мы включили в этот сборник две статьи Ньюкома [V, XV], относящиеся к нашей тематике, а непосредственно ниже помещаем его же статью весьма общего характера, чтобы ознакомить читателей с мнением этого классика об условиях развития науки в данной стране.

Не всё представляется удачным в рассуждениях Ньюкома, и мы выразили свои оговорки в примечаниях, здесь же укажем, что он был многосторонним ученым и популяризатором науки. Об этом мы вкратце упомянули в нашей статье (2002, с. 142 – 144). Так, он (Newcomb 1891) участвовал в фундаментальном эксперименте по определению скорости света и опубликовал работы по статистике населения, метеорологии и экономике (по поводу последней см. Прим. 22), а Вашингтонское антропологическое общество наградило его статью (1894) об обязанностях гражданина США. И не забудем, что он обработал более 62 тысяч астрономических наблюдений Солнца и планет, произведенных на различных обсерваториях мира, и обновил систему астрономических констант, не имея притом никаких вычислительных средств кроме таблицы логарифмов.

[1] Если нас спросят о народе, находящемся в таких же условиях, в которых очутился наш народ в начале своего национального существования, какая самая маловероятная область чисто умственных усилий, в которой он отличился бы, то вряд ли мы усомнимся ответить: во всей области абстрактной науки, – физической, политической и интеллектуальной. Одно из оснований для такого вывода лежит на поверхности. Среди серьезных умственных занятий точное овладение главными познаваемыми принципами, на которых покоятся все явления природы и то, видимо, бесполезное прослеживание понятий природы по мельчайшим подробностям ее действия представляются менее всего нужным обычному, пусть и просвещенному человеку.

Он не сможет жить в обществе, не ощущая отсутствия, во-первых, кодекса законов и без знания законов вообще. Он не сможет далеко продвинуться в умственных способностях без ощущения недостатка в литературе для отдыха от своих утомительных занятий и не сможет прочесть многих хороших книг не представив себе различия между добром и злом. И для восхищения обаянием музыки и красотой форм и цвета не нужен никакой редкий или особый дар.

Но сможет ли он когда-нибудь заинтересоваться техническими деталями научного исследования? Желание побольше узнать о явлениях природы возникнет так же естественно, как любовь к литературе и искусству и будет распространено так же широко. Нельзя представить себе человека, любящего читать, но не чувствующего некоторой любознательности о природе и назначении небесных тел, а каждый обитатель лесной глуши обязательно приобретает какой-то объем знаний о животных и растениях. Но приобретение знания такого рода не означает научного продвижения. Если мы начинаем обсуждать круги небесной сферы, атомные веса химических элементов, сходство соответствующих частей животных различных видов или законы наследственности, а особенно если станем подробно исследовать обычные повседневные темы, что в то же время так необходимо для их философского восприятия, и так неприятно обычному уму, наши слушатели быстро исчезнут.

[2] И таким образом имеется очевидная причина для того, чтобы в стране, подобной нашей, научное исследование, достойное этого имени, должно было начаться только после достижения весьма продвинутой ступени умственного развития. Но есть и родственное, хотя и менее очевидное обстоятельство, влияющее на причины научного прогресса, которое заслуживает весьма серьезного рассмотрения.

Рассудок нации, как и отдельного человека, может обладать особенностями, приводящими к выдающимся успехам в некоторых направлениях и в то же время оставаться совершенно несостоятельным в других. Мы здесь имеем в виду не общие различия в умственной мощи различных рас[1], как например, европеоидной и монголоидной, а отличие в специальных способностях и склонностях между людьми, общие умственные силы которых в общем одинаковы. Изучение истории современной науки показывает нам достаточное число примеров либо распространения специальных способностей среди большой части нации, либо, как представляется, их полное отсутствие, что весьма трудно объяснить.

Один такой пример представляет развитие теории всемирного тяготения. Ее установление было успехом британского разума, равно как и Ньютона, потому что несколько его современников весьма ненамного отставали от него в рассуждениях, которые приводили к этой теории. Превосходство англичан в способности исследования, необходимой для ее установления, казалось было выявлено их готовностью осознать истинность и усмотреть следствия из нее, тогда как целое поколение континентальных математиков занималось пустыми возражениями против нее[2].

Однако, после публикации *Начал* развитие этой темы в Англии полностью прекратилось, и, в то время, когда Клеро, Лагранж и Лаплас изучали последствия открытия Ньютона, вряд ли кто-либо в Англии хотя бы понимал их сочинения. Все щедрые награды, которыми английское правительство иногда так почетно выражало высокую национальную оценку ученых, использовавших силу притяжения для определения долготы на море[3], достались иностранцам. Хотя английский *Nautical Almanac* (Морской ежегодник) основывался главным образом на данных, полученных из наблюдений в Гринвиче, их табулирование для практического использования целое столетие выполняли иностранцы.

Мы усматриваем здесь поразительное отличие между результатами умственного труда двух наций, проявлявшееся на протяжении двух веков, и тем не менее происшедшее от казалось бы слишком малого и не требующего внимания отличия между их чертами рассудка.

Возможно, что английский ум более научен. Обращаясь к внешнему миру, он с большей готовностью постигал идеи, относящиеся к природе; усматривал связи между явлениями в ней; отличал в формулируемых предложениях относящееся к делу от постороннего; освободился от тенет философских систем. Короче, он был в общем лучше во всем, что подразумевается термином *прозорливость*. Однако, после того, как общее понятие о природе было воспринято и выражено математическим языком, континентальный рассудок оказался наилучше приспособленным для установления его следствий при помощи дедуктивных операций. Это требовало способности подробного исследования, пристального сосредоточения на мелких обстоятельствах и терпеливой выносливости при обдумывании длинной серии мыслей. Подобными качествами английский рассудок не обладал, и так с тех пор и не приобрел их.

Критическая история научной мысли за три столетия, прошедшие после возрождения науки, без сомнения показала бы многие другие плоды того различия, которые мы попытались разъяснить. Станет ясно, что во всем, требующем проницательности в содержательных предположениях и при открытиях, достигнутых по индукции, англичане оказывались впереди всех других наций. Но вот разработка открытий, или по меньшей мере каждая ветвь разработок, требовавшая терпеливого прилежания и подробного анализа, как окажется, была оставлена на долю других наций. Примеры тому не обязательно ограничиваются физической наукой. Политэкономия, поскольку она развивалась до сих пор, это как раз та отрасль прикладного мышления, если можно так выразиться, которая более всего требует проницательности для своего восприятия и приложения. И это качество, если учитывать, в какой степени смысл преобладает над бессмысленностью, заметно преимущественно в английских сочинениях по указанному предмету.

[3] Кто склонен изучать то, что можно назвать интеллектуальной естественной историей народов, найдет поучительную тему для исследования в различных взглядах на дарвинизм, преобладающих в четырех великих мыслящих нациях мира. В стране своего происхождения он является предметом неистовой полемики между религиозным и научным мирами; в Германии дарвинизм воспринят со всеобщим одобрением как одна из великих философских побед столетия; во Франции его полагают совершенно беспочвенной спекуляцией, не достойной внимания биологов; в США он воспринят естествоиспытателями, однако общество полагает, что никак не может составить мнение о нем[4].

Если мы теперь, исходя из размышлений американского народа о всякого рода предметах, критически исследуем его способность к суждению, то почти наверняка поразимся определенной односторонностью ее развития, имеющую существенное отношение к ее пригодности к научным исследованиям. В предметах, которые обычно относятся к области практической прозорливости и хорошего здравого смысла, ему нечего стыдиться. Там, где к выводу приходят таким инстинктивным путем, который не сводится к логической форме, и где нет нужды исследовать основные принципы, мы можем справедливо считаться нацией разумных.

Но нам следует признать, что если при исследовании чего-либо мы попадаем в область, в которой необходима более высокая или более точная форма рассуждения, когда приходится анализировать основные принципы и иметь в виду взаимосвязь результатов, то наш образ действий окажется неубедительным. Может почти показаться, что наша способность к диалектическому мышлению, оставаясь без употребления, пришла в упадок. Обычный *здравый смысл* весьма разумных граждан в большинстве случаев оказался вполне достаточным для всех целей, когда требовалась способность к суждению, а потому нация в целом никогда не ощущала нужды в более точных методах мышления. Вряд ли найдется область нашей умственной деятельности, в которой пристальный и критически настроенный наблюдатель не нашел бы много примеров указанной особенности.

Если принять в качестве мерила для сравнения три ведущие интеллектуальные нации Европы, Англию, Францию и Германию[5], то лишь последняя из них может соревноваться с нами по представляемым условиям для народного образования и пониманию его важности. Но, взглянув на высшее образование, полученное изысканным джентльменом, государственным деятелем, инженером или финансистом, мы увидим, что находимся далеко позади этих стран по обоим указанным обстоятельствам.

Наши элементарные учебники так же хороши, как любые иные, но немногие имеющиеся по высшим отделам логики и повышенным разделам математики весьма несовершенны. В математических учебниках нет ясной и отточенной мысли, что считалось бы недопустимым для учителя в названных выше странах. Рассматривая нашу политику и юриспруденцию, мы сейчас же заметим общую проницательность наших общественных деятелей, их способность приспособлять средства для непосредственных целей, а их успешная дипломатия неоспорима.

Но где в нашем законодательстве можно увидеть какие-либо попытки всмотреться во что-либо, лежащее за пределами сиюминутной необходимости? Что можно сказать о сохранении законов о ростовщичестве в их своде и о той редкости, с которой можно встретить в общественной жизни человека, обладающего логической сообразительностью, необходимой для выявления ложных положений покровительственной теории? Какое унылое впечатление о нашей юриспруденции окажет простое цитирование различных юридических решений, принятых в связи с актами о законных платежных средствах!

[4] Эта национальная односторонность в способности суждения весьма существенно связана с состоянием наук, потому что успешная разработка более высоких отделов любой отрасли науки требует ее высочайшего развития. Ни инстинкт, ни здравый смысл сами по себе не достаточны для постижения менее понятных действий законов природы.

Верно, конечно, что существенное большинство более важных и осуществляемых приложений научных принципов и очень много полезной научной работы может быть сделано без полнейшего развития диалектического мышления, но ни подобные приложения, ни подобная работа не составляет высшего занятия научного исследования. И по этой причине весьма естественно ожидать, что в нашей стране развитие высших отраслей науки должно было быть отмечено той же отсталостью, которая свойственна [у нас] высшим формам мышления в других областях; и что, как достойно мы бы ни выглядели в низших ветвях науки, в ее высших отделах мы окажемся далеко позади.

Ту же тему можно рассмотреть чуть с иной точки зрения. Никакие две системы идей не окажутся в столь полной мере антагонистичными, как те, которые воодушевляют так называемого практичного человека нашей страны и исследователя, работающего в любой области, заслуживающей названия науки или философии. На самом деле нет ничего более практичного ни по методам, ни по результатам, чем современная, в лучшем смысле этого слова, наука, и все выгоды, которые практичный человек ценит выше всего, обязаны открытиям законов природы людьми науки, притом, однако, что это ни в коей мере не ослабляет указанного антагонизма между основополагающими идеями.

Первое условие для действительно удачных и важных научных исследований – это подыскание лиц, желающих затратить много труда и внимания из чистой любви к предмету, не имея в виду в качестве существенного соображения никакой практической пользы. Истинный ученый столь же заинтересован в географии Луны, как и в географии Земли, и с таким же рвением изучает мельчайшее микроскопическое существо, как и самого человека.

Сам факт явного пренебрежения пользой придает научному исследованию широту, которой он в противном случае никогда не обладал бы и которой фактически обязаны открытия столь неисчислимой пользы для человечества. Если практический человек возражает против бесполезного знания, считая его отбросом, мы должны будем ответить, что не добыть золота без пустой породы[6] и что существа, открывшего полезные законы природы и пренебрегавшего бесполезными, в истории мира не было и вероятно не будет никогда. На самом деле, поскольку речь идет о новых законах, нельзя заранее сказать, будет ли их открытие полезным, притом быть может через несколько поколений. Тот, кто хочет убедиться в полезности закона перед тем как попытаться открыть его, никогда ничего не откроет.

[5] Нельзя было ожидать, что у ранних поселенцев в нашей стране, для которых великой задачей жизни была победа в трудной борьбе за существование, разовьется описанная нами наклонность к науке. Предположить, что они будут поощрять и поддерживать кого-либо из своих рядов в трудных исследованиях для одного лишь приобретения знаний, означало бы ожидать от них чего-то сверхчеловеческого. Было бы по сути почти нарушением законов природы надеяться на появление в такого рода обществе вышколенного исследователя.

И поэтому американская наука может с большим удовольствием назвать своим отцом столь достойного человека как Бенджамина Франклина. Начавшись, как это и случилось, со столь фундаментального открытия, как отождествление молнии и электричества, она, как почти могло бы показаться, родилась вполне взрослой. Имей бы Франклин помощников и последователей, сравнимых с ним самим, наша наука смогла бы вскоре состязаться с европейской. Но обратив внимание на тех последователей, которые появились на самом деле, и сравнив их условия с теми, при которых были достигнуты быстрые успехи в познании законов природы, мы увидим одну из причин, по которой рост дерева, посаженного Франклиным, оказался таким медленным, а само дерево – чахлым.

Одно из первых впечатлений, которое осеняет нас в истории современных научных исследованиях, это то, что они редко выполняются с существенным успехом отдельными лицами. Мы не имеем в виду труды тех необычных личностей, о которых можно сказать, что они воспользовались некоторой эпохой, благоприятной для продвижения разума, как например Кеплера, Ньютона и Линнея; нет, мы говорим о той постепенной разработке и развитии идей, которые составляют великое тело научного учения. Личности, подобные названным, могут появиться в любую эпоху, которая должна быть подготовлена к их приему. Теперь, однако, каждое поле так тщательно исследовано и сведено к техническим усилиям, что мы больше не видим возможности для гения разрабатывать существенно новые идеи в одиночку[7].

Почти все громадные успехи, достигнутые со времени Ньютона, были получены лицами, трудившимися в тесном общении друг с другом. Обоюдная жесткая критика идей, соревнование соперничающих работников, интерес, вырабатываемый от сношения родственных душ, пусть низшего ранга по таланту, – всё это является весьма важными факторами таких успехов. Мы видим, следовательно, что учреждение Королевского общества в Англии и Парижской академии наук обозначили эпоху возрождения науки в Европе. В течение последовавших двух веков история этих научных обществ была почти равнозначна истории познания природы в соответствующих странах.

[6] Со времени Франклина успехи американской науки очень сильно зависели от того, как удавалось поддерживать тесную связь между учеными. Он прекрасно начал, учредив Философское общество[8]. Среди его ранних членов до нас дошло, кроме его собственного имени, имя только одного выдающегося деятеля в области науки, – Риттенхауса. Ни он, ни его великий современник не обладали преимуществами основательного образования; в юности Риттенхаус немало занимался крестьянским трудом. И всё же условия его жизни не исключали возможности занятий умственным трудом, и он самостоятельно овладел физической наукой своего времени настолько полно, насколько это было возможным в его положении.

Во многом его репутация среди сограждан была основана на изготовленных им часах и планетариях, но его имя стало известно будущим поколениям ввиду его мастерства как астронома-практика. Он не имел общественной обсерватории, не занимал никакого положения, которое частично обязывало бы его изучать науки. Он добывал свой хлеб, используя свои способности, работал в основном с изготовленными им самим инструментами, и нельзя было бы ожидать, что его результаты окажутся такого же охвата, как у астрономов в более благоприятных условиях. Но, в общем, по точности, т. е. в главном для астрономической обсерватории, они были вполне на среднем уровне своего времени. В 1769 г. он наблюдал известное [астрономическому миру] прохождение Венеры по диску Солнца с так же внимательно и мастерски, как и при других своих наблюдениях, а метеорологические условия были при этом необычайно благоприятны, и по всей видимости его результаты оказались среди лучших из всех остальных [сделанных в разных странах]. Примечательно, что он продолжал наблюдения по меньшей мере до середины Войны за независимость [1775 – 1783].

Как и следовало ожидать, ранние годы Республики [после 1783 г.] должны были оказаться неблагоприятными для доскональных философских исследований любого рода. Ум нации был слишком занят более неотложными потребностями и не допускал никакой серьезной деятельности в направлениях, не ведущих к немедленным практическим результатам. Тем не менее, некоторые факты указывают, что мыслящий дух нации вовсе не был ослаблен происшедшей ужасной борьбой. В 1783 г. законодатели Пенсильвании выделили Философскому обществу 400 долларов, что было знаком высокой официальной оценки, которую вряд ли подобное научное общество получало с тех пор либо от правительства страны, либо от какого-либо штата. Через 10 лет после признания независимости страны[9] то же общество построило для себя, как в то время считалось, "изящное, удобное и просторное здание".

Действительно, лишь немногие наши научные общества смогли сделать для себя столько же. Общественное признание Риттенхауса было доказано многочисленными и почти навязанными ему должностями, и так же, как это случилось с Франклином, он лишился времени, необходимого для научных исследований. Если по причине подобного общественного признания Франклин и Риттенхаус были в определенном смысле потеряны для науки, то трудно было бы поверить, что развитие американской науки от этого замедлилось. Казалось бы естественным, что многие лица из подрастающего поколения захотят повторить карьеру этих ученых, и описанный нами дух был существенно благоприятен этому. Поразительно, однако, что никакого подобного поступательного движения не только не произошло, что основной центр тогдашней науки даже не оставался на своем прежнем месте, и что дерево, посаженное двумя названными выше учеными[10], не только оставалось бесплодным, но совершенно засохло.

[7] В течение полувека не было ничего, достойного называться национальной наукой, ничего такого, на что общество могло бы взглянуть и горделиво назвать результатом нашей системы образования или наших усилий содействия познанию природы. Появилось два или три гения, но общественность никак не поощряла их, и в любом случае их труды свидетельствуют об отсутствии критики со стороны способных на это лиц, работавших в аналогичных направлениях. Достойно внимания, что они были в основном самоучками. В описываемом промежутке времени научные занятия, которые, как казалось, должны были бы быть наиболее естественными в нашей стране, не приобрели от американских исследований боле длительного отпечатка, чем другие науки.

Флора и фауна новой страны должна была предоставить область исследования, соблазнительную для научных склонностей и хорошо вознаграждаемую в практическом смысле. Нельзя сказать, что этой областью науки совсем никто не занимался, но никто из работавших в ней не совершил ничего, что бы оставило постоянный след. Среди них не только не оказалось творческого гения, но сомнительно также, что кто-либо из них в такой же степени шел в ногу с тогдашней европейской наукой, как Франклин и Риттенхаус. Мы не можем сильно удивляться тому, что наша страна не взрастила никакого Лавуазье, Кювье или Жюсьё[11], но почему у нас не было достаточно сделано для восприятия, критики или развития их идей?

Знай мы точно, сколько времени потребуется, чтобы новые системы классификации [видов] вытеснили линнеевскую по всей нашей стране, это имело бы большой исторический интерес, но боимся, что вовсе не стало бы национальной гордостью. На самом деле наша наука была немногим больше, чем робким комментарием европейской, и некоторые образцы последней, полагавшиеся стандартами, перенимались так же, как средневековые схоласты принимали философию Аристотеля. Подробное исследование причины существования этого периода явного умственного застоя потребовало бы от нас такой степени восприятия его духа и истории, которая возможна лишь у профессионального историка. И всё же некоторые соображения о положении вещей возможно не окажутся лишними.

[8] Для того, чтобы обеспечить в стране успешные занятия наукой, требуется, во-первых, чтобы родились исследователи, и, во-вторых, чтобы позаботились об их воспитании. Для тех редкостных лиц, которых в стране вряд ли рождается более одного в столетие, последнее условие может оказаться весьма маловажным, а потому выполняться очень несовершенным образом, но в какой-то форме оно обязательно. Бесполезно надеяться, что величайший гений, удерживаемый до среднего возраста в лесной глуши вдали от книг и живых учителей, когда-либо совершит некое великое техническое научное исследование. Причина, по которой в рассматриваемом периоде о воспитании лиц, занимавшихся абстрактными исследованиями, не заботились, можно найти в общем состоянии общественного мнения. Но не может ли кроме того существовать в нашей стране что-то неблагоприятное даже для рождения высочайшего научного таланта? Или же, учитывая односторонность общего развития американского интеллекта, которую мы попытались описать, не могла ли аналитическая мощь, прослеживающая законы природы по сложным условиям их действия, быть частично заменена изобретательным талантом, давший миру раньше других стран пароходы, телеграф и швейные машинки?

Если для того, чтобы стать научной нацией, требовалось широкое рассеивание аналитической мощи, пришлось бы признать, что так у нас и произошло. Но поскольку требуемое число исследователей философии в любом случае весьма мало, тот факт, что общее мышление нации не склоняется в научном направлении, не предотвращает возможности рождения в ней этого небольшого числа.

[9] В рассматриваемом нами вопросе существенно важно влияние расы и наследственности. Если считать взгляды Гальтона по наследственности таланта по отношению к гениям научного исследования верными, то мы должны будем полагать происхождение американской нации неблагоприятным для их рождения. Среди эмигрантов, приплывших к нашим берегам, слой философов и людей науки не был достаточно представлен даже пропорционально их малому числу. И по необходимости, при сравнении с мыслящими нациями Европы, непропорционально малая часть нашего населения смогла бы найти философов и исследователей среди своих предков.

Однако, в какой бы степени теория наследственности таланта ни была верна, при учете той общей силы характера, по которой человек становится заметен среди своих товарищей, преобладающие свидетельства оказываются решительно против распространения этой теории на гениев науки. Они, пусть даже среди одной и той же расы, появляются, видимо, совершенно случайно. В нескольких случаях можно проследить передачу гениальности от отца к сыну, но сомнительно, что когда-либо она была установлена и далее[12]. Представляется, что особенности, с которыми связана гениальность, какой бы они ни были, слишком слабы, чтобы она могла либо увековечиться, либо наверняка исчезнуть у потомства мыслящих людей. У гениев нет ничего, что заставило бы поразиться окружающих их. В своих потребностях, в своем общем виде (organization) и вообще во всем, находящемся вне области точного мышления, они составляют достаточно обычный слой. И в целом нет основательной причины полагать, что в нем рождается у нас соответственно меньше, чем в других мыслящих нациях, а любые недостатки, которые мы, возможно, отыскали [у себя] вероятно вызваны несовершенством питания.

[10] Возвращаясь к рассмотрению американской науки в 1790 – 1840 гг., мы находим некоторое подтверждение выраженных нами взглядов в том, что несколько американцев первого ранга по своей умственной мощи, если и не смогли тогда достичь положения в соответствии со своим талантом, то только ввиду внешних обстоятельств. Как представителей этого тонкого слоя можно назвать Боудитча, Bache и Генри, примечательных тем, что ни один из них не получил образования в колледже. Несмотря на особо неблагоприятный род занятий в ранние годы, вряд ли среди современников Боудитча был кто-нибудь иной, более полно овладевший небесной механикой того времени. Он добился мастерства своими собственными усилиями, из чистой любви к этой науке, без поддержки извне и будучи занят коммерческими делами или мореплаванием. По этой причине мы вряд ли сможем отказать ему место по таланту рядом с Лапласом и Гансеном[13].

Но он никогда не был подстегнут критикой родственных умов, как это произошло бы в Париже или Берлине, а потому его оригинальные произведения ни в коей мере не соответствуют тому, что можно было бы ожидать, родись он в Европе. Лучшее, что он быть может осуществил, это побудил своих сограждан заниматься высшей математикой. Он всегда будет более всего известен своим переводом *Небесной механики* Лапласа [на английский язык], о котором следует судить по его влиянию. Как памятник трудолюбию и доказательство мастерства Боудитча в этой дисциплине этот труд нельзя превзойти. Боудитч не притязал на добавление чего-то, и его цель была в основном педагогической.

Наиболее примечательной особенностью перевода был подробный и доходящий до мелочей комментарий, поясняющий каждую трудную операцию. С его помощью изучающие небесную механику, овладевшие высшей математикой лишь по существовавшим несовершенным и наивным учебникам, могут проследить за рассуждениями автора. Этот комментарий безусловно позволил многим прочесть труд Лапласа, чего иначе они не смогли бы сделать. Но мы не можем признать его наиболее полезной формой возможной помощи. Тот, кто не был в состоянии прочесть Лапласа без комментария, не получил от него никакой реальной помощи, хотя мог бы получить ее, изучив более элементарные предметы. Комментарий был подобен подстрочнику к классическому автору, который позволяет студенту без посторонней помощи прочесть его, не изучив грамматику незнакомого ему языка [греческого или латинского][14]. Как и некоторые другие сочинения Боудитча, его комментарий свидетельствует об отсутствии того вдохновения, которое появляется при непосредственном общении с мастерами науки. Проведи он в юности хоть один год в муштровке европейского университета, результат стал бы заметен во всем, что он сделал.

[11] Поразительный пример отсутствия всего, похожего на реальную национальную гордость в науке, представляется тем, что должно было пройти два поколения без появления в стране кого-либо, кто продолжил бы философские исследования Франклина. Успех такого человека в подобном направлении должен был бы естественно вызвать в последующем поколении его сограждан особый интерес к изучению электричества и к соответствующим опытам, так что электричество стало бы в какой-то мере национальным предметом исследования. Но ни малейшего следа таких усилий не было видно.

До тех пор, пока Генри не начал производить своих опытов, в стране не было опубликовано ни одного исследования электричества, о котором имело бы какой-то смысл сейчас помнить. Так же, как вообще у американских ученых, опубликованные работы Генри не дают должного понятия ни о его мастерстве, ни о затраченном им на самом деле труде, притом при отсутствии внешних обстоятельств, которые в других странах вдохновляли на исследования. Будь он в положении Фарадея, он быть может стал бы столь же известен. Если ему не хватало фарадеевского мастерства в планировании экспериментов, он восполнил бы этот недостаток точным пониманием тех предположений, которые опыты должны были либо обосновать, либо опровергнуть. Его открытие некоторых законов электричества, которые сделали возможным телеграф Морзе, хорошо известны, однако, как обычно, общее внимание полностью сосредоточилось на изобретателе, который применил их на практике, он же был почти забыт. Что бы он ни смог сделать в области оригинальных исследований, его деятельность в этом направлении по необходимости существенно ослабла, когда он занял административную должность, задача которой состояла в воодушевлении других.

Схожей оказалась карьера Bache. Окончив [военную академию] Уэст Пойнт, он был самоучкой в меньшей степени, чем другие названные лица. Как и большинство великих представителей американской науки, его деятельность в ранние годы научных исследований изменилась после занятия должности. Проведение серии физических опытов требует определенного времени для тщательного и спокойного обдумывания, что совершенно невозможно для того, кто становится директором Береговой съемки[15].

[12] Из сказанного об истории и трудах основных выдающихся представителей американской науки видно, что сравнительно несовершенное развитие нашей научной мысли не было вызвано каким-то недостатком отечественных дарований. Каким бы отрицательным ни было мнение нации о точном научном мышлении, она рождала достаточное число великих умов, требуемых для своего интеллектуального положения. Но мы отчетливо усматриваем, что преемственность в трудах наших ведущих ученых в очень большой степени отсутствует. И действительно, лишь горсточка американских исследователей занималась своим делом всю свою жизнь, последовательно, как это происходило в Европе. Иногда их неудача вызывалась недостаточной настойчивостью, поскольку опыт показывал, что успех не будет сопровождаться никакой наградой, сравнимой с затратами труда. Чаще, однако, она объяснялась менее возвышенными, но более настоятельными обязанностями жизни, которые исключали возможность должного обдумывания своих исследований. Даже при заведывании кафедрой, когда исследования, как можно думать, были бы самым подходящим занятием в свободное время, обычно оказывалось, что вся энергия поглощалась должностными обязанностями.

Позволительно сказать, что та наука, о которой мы до сих пор пытались предоставить ясное понятие, и которая составляет часть интеллектуальной жизни нации, опиралась исключительно на свои собственные заслуги. Ее работники занимались ей из чистой любви к своему предмету, шли в большой степени своим собственным путем, и заканчивали свои труды, когда обстоятельства направляли их энергию в другое русло. Но ни в одной цивилизованной стране наука не предоставлена самой себе. Хоть государство может и не делать ничего особенного для продвижения чистой науки, имеется так много важных приложений научных принципов, необходимых для общественного благополучия, что какое-то внимание уделяется прикладной науке. И вскоре становится невозможным приложить науку действительно полезным образом без такого тщательного исследования соответствующей темы, которое тем самым способствовало бы продвижению чистой науки.

[13] И поэтому нельзя получить полного представления о прогрессе нашей национальной науки без изучения ее отношений с нашим правительством и мер, которые оно принимало для ее продвижения. Ведущие правительства Европы обычно гордились своим содействием научному знанию, и можно проследить, как вызванные этим усилия привели к научному возрождению XVII в., которое при своем продвижении оказало столь существенное влияние на нашу цивилизацию. В начале того века не имелись в виду никакие чисто практические цели. Монархи, подобные Людовику XIV [1638 – 1715] и Фридриху II Великому [1712 – 1786], желали прославить свое правление продвижением интеллектуальной деятельности всех видов и поэтому стремились окружать себя лицами возвышенной репутации. Так в главных европейских столицах возникли или начали процветать академии наук.

Общая политика по отношению к ним не разнилась существенно. Их члены обычно получают небольшое вознаграждение от своих правительств не в качестве содержания, а как предохранение от нищеты вне зависимости от обстоятельств. Наиболее важна помощь, предоставляемая правительствами в форме средств для проведения исследований и публикации результатов. В свою очередь, академия выступает как советник правительства по всем делам, относящимся к приложению науки в управлении его делами. Существуют, разумеется, некоторые отличия в подробностях организации этих научных обществ, а для Англии оно настолько глубоко, что нельзя [даже] сказать, что эта страна имеет академию наук в континентальном смысле слова. Академию частично заменяет Королевское общество, однако правительство никак не способствует его существованию и даже не помогает публиковать его труды. И всё же влияние Общества на правительство существенно не отличается от положения дел на континенте. Хоть оно формально и не признано в качестве официального советника, с ним постоянно консультируются, как это происходило бы и в противном случае.

[14] Насколько нам известно, в истории нашей страны был лишь один случай, когда правительство почувствовало необходимость в научном консультативном обществе. Скажи мы, что одно из основополагающих учений нашей нации состоит в том, что разумный и влиятельный гражданин имеет такое же право делать всё, что угодно, наравне с любым другим, нас могли бы обвинить в серьезном преувеличении. Но было бы равным образом неверным утверждать, что сохраняется и применяется противоположное учение. Существуют какие-то действия, проведение которых требует особого мастерства и специальной подготовки, и этот факт является одним из тех, которые наши администраторы в общем осознают очень медленно, если только их не подгоняет сила обстоятельств. В основном это несомненно вызвано общей многосторонностью и приспособленностью среднего американца, что в существенном большинстве случаев с полным успехом заменяет им мастерство и специальную подготовку.

Неудивительно поэтому, что правительство редко ощущало потребность в советах специалистов в делах администрации, причем даже тогда, когда достижение какого-то успеха, как должно было бы показаться, требовало привлечения самого лучшего научного знания. Мы сказали, что было одно исключение. Когда [в 1861 г.] разразилась гражданская война, правительство оказалось заваленным изобретениями улучшенного оружия, об осуществимости которых нельзя было судить без помощи научных экспертов. Для предварительной оценки изобретений была поэтому сформирована группа таких экспертов. Это навело на мысль об учреждении постоянной академии, которая должна была бы исследовать и докладывать о любом предмете науки и искусства, когда только любое министерство попросит об этом.

И так возникла Национальная академия наук, официально признанная актом Конгресса в 1863 г. Ее будущих успехов пока нельзя предвидеть, но в прошлом она столкнулась с несколькими препятствиями. Прежде всего, хоть официально Академия должна была выполнять те же задачи, что и европейские, эта цель при ее организации была предана полному забвению. Главным условием для выполнения подобных функций является проживание ее членов в столице или возле нее и проведение частых собраний. Фактически же входящие в нее члены были рассеяны по всей стране, так что более одного или двух собраний ежегодно быть не могло. И таким образом вряд ли стоит обсуждать, было ли при выборе членов главным условием высокое положение в науке.

Далее, устав Академии содержал нелепый запрет на получение помощи или любого вознаграждения от правительства за оказанные ему услуги. Мы говорим *нелепый*, потому что главнейшее условие для полезности академии было таким образом нарушено. Что мы должны были бы подумать об официальном утверждении Конгрессом академии юриспруденции, главным условием которого является оказание бесплатных юридических услуг ее членами всем министерствам в любых судебных делах, в которые они могут быть вовлечены? Чтобы оценить создавшееся положение, нужно помнить, что Академия не получает никакой поддержки, ни прямой, ни косвенной, от правительства. Предоставь оно помещение для собраний Академии, для ее канцелярии или коллекций; возмещай оно расходы ее членов, присутствующих на собраниях; публикуй или распространяй оно научные статьи, прочитанные в Академии и одобренные ей; или помогай оно ей в этом деле, – положение не было бы столь плачевным. Началась было публикация таких статей в правительственной типографии, но прекратилась ввиду затраты правительственных денег на это, т. е. нарушения того условия, при котором Академия была учреждена. Общим результатом оказалось, что противоречие между возвышенным названием Академии и знаменитостью ее членов с одной стороны, и ее возможностью оказывать либо пользу, либо вред, настолько нелепо, что сами ее члены вряд ли не сознают этого. Это слишком напоминает выдающуюся почтенность с продранными локтями.

[15] Недавним примером полного отсутствия всякой необходимости в научных консультациях в управлении делами правительства послужило учреждение при штабе войск связи службы отчетов о погоде и ее вероятности в будущем. По своему значению и охвату организованная метеорологическая служба не имеет равных в мире; ее стоимость в той же мере превосходит всё, что какая-либо европейская нация когда-либо помышляла предназначать для этой цели. Будь столь величественный план, предусматривающий соответствующие затраты, предложен любому иному правительству, достаточно сильному для его осуществления, первым же предложением было бы повременить с ним до тех пор, пока не будет получено мнение самых высоких научных авторитетов о его выполнимости и важности. Для утверждения правительством были бы совершенно необходимы поддержка и одобрение знающих метеорологов.

Тем не менее, насколько это известно общественности, ни один авторитетный научный специалист, ни один эксперт в области метеорологии никогда не был официально опрошен либо о плане, либо о его выполнении. Полную ответственность несет один-единственный офицер, который составлял и выполнял этот план, за что ему одному приписывается официальная честь. Мы просим читателей обдумать этот факт с его положительной и отрицательной сторон. Мы усматриваем последнюю, вспомнив, как полностью пренебрегли теми, чьи исследования сделали возможным предсказание пути следования штормов, или забыли про них, и это тогда, когда их труды должны были оказаться практически полезными. Некоторые из наиболее способных и активных из этих людей были американцами, а несколько человек из их числа всё еще живы. Положительная сторона достаточно ясна, и у нас нет никакого желания умалить ни организационное дарование, проявленное начальником войск связи при осуществлении плана, ни щедрость Конгресса, который поддерживает всю работу.

[16] Наиболее важными отношениями между правительством и наукой оказались те, которые произошли в результате оплачиваемых им в этом направлении изысканий и особенно геодезических и картографических съемок. Одной из самых первых потребностей была тщательная съемка побережья и гаваней, которая выполнялась с начала нынешнего века. Впрочем, эта работа была отложена и прерывалась по различным причинам, что воспрепятствовало ее существенному продвижению вплоть до 1832 г. С научной точки зрения работа с самого начала шла великолепно ввиду ее компетентной организации. Первым руководителем был Хаслер, вдумчивый исследователь и опытный геодезист, который привнес в эти изыскания самые высокие идеи системности и точности, но который не смог добиться доброжелательности Конгресса. Под руководством его преемника, покойного Bache, которого нам так недостает, эта работа оказалась наиболее совершенной геодезической и картографической съемкой в мире, применявшей наилучшие методы и приводящей к весьма точным результатам.

Среди тех методов, разработка которых активно внедрялась, важнейшим было почти революционное по своим результатам определение долгот с использованием телеграфа, приведшее к установлению их цепи от Сан Франциско поперек материка Америки, через Атлантический океан, Европу и Азию вплоть до тихоокеанского побережья Дальнего Востока. Степень достоверности полученных результатов нельзя было бы обеспечить никаким другим методом [даже] за столетие.

Другая система съемок, при помощи которых правительство косвенно способствует изучению наук, проводится на Территориях[16]. Имея в виду их обширность, неизвестные минеральные богатства, экономические возможности проживания на них и создания там промышленности, равно как и необходимость точного знания географии и геологии как предварительного условия для развития ресурсов, – имея всё это в виду, повышающееся внимание к географическим и геологическим съемкам не покажется удивительным.

Содержание этих съемок довольно хорошо согласовывалось с научным развитием страны в соответствующем периоде, а их критического исследования достаточно, чтобы показать тщетность успешного разделения науки на чистую и прикладную. Более ранние съемки были просто землеустроительными и имели целью подразделить некоторый заданный район на квадраты 10х10 миль. Земельное управление (Land Office) не имело сотрудников достаточного мастерства, и результаты оказались исковерканными бесполезными усилиями государственных землеустроителей. Рассматривая карты, составленные управлением, мы найдем тут и там направления, ошибочные на пять или даже десять градусов, но как правило мы замечаем постепенное улучшение за последние 40 лет.

Необходимость выдерживать общественную критику приводит к непрерывным попыткам отыскать для каждой съемки знающих геологов, топографов и астрономов, что в свою очередь поощряет молодых людей к самостоятельной подготовке для занятия подобных должностей. Соперничество двух министерств в руководстве съемками Территорий, как бы сильно не сожалеть о некоторых последствиях этого, побудило всех работать в поле как можно лучше. В целом, выполнение этих съемок хорошо настолько, насколько можно было бы надеяться при нашей административной системе.

[17] Мы описали и сопроводили примерами общее низкое состояние американской науки в течение первых 40 лет этого столетия, которое можно назвать общей вялостью, прерываемой от случая к случаю деятельностью какого-либо первоклассного ученого. Его усилия, однако, обычно переставали быть направленными в чисто научное русло. С 1840 г. в некоторых направлениях произошло крупное и всеобщее усиление активности, которое с определенной точки зрения видимо ознаменовало совершенно новое состояние и обещает доброе будущее. Но многие черты нынешнего положения серьезно указывают на прежнюю отсталость, так что можно заметить находящееся рядом друг с другом старое и новое.

В биологии значительную долю недавнего развития можно проследить вплоть до появления у нас [в 1846 г.] Агассиса. Немедленно после этого блеск его европейской репутации привел к такому общественному вниманию и обсуждениям, каких американцу пришлось бы долго дожидаться, а его примечательная педагогическая мощь обратила многих молодых людей к его любимой науке. Нельзя также пренебрегать его мощью как лектора-популяризатора, и трудно оценить влияние, которое он оказал на общественное сознание, поскольку на самом деле оно простирается далеко за пределы его непосредственных личных сношений.

Чего Агассис добился в биологии, то совершил Митчел в астрономии. Всё, чего ему недоставало в чисто научном даровании и репутации, он возместил непревзойденной способностью очаровывать общественность своими описаниями астрономических явлений. Его имя было лишено привкуса зарубежного рождения и заморской знаменитости, но этот недостаток он возместил заинтересованностью в своей науке и ее возвышенностью, что особо соответствовало вкусам и низшего, и высшего слоев смышлёных слушателей. Он, вероятно, посеял многие семена, из которых взошла нынешняя американская астрономия.

Если мы рассмотрим хотя бы приборы для астрономических исследований и число лиц, так или иначе занятых в них, то развитие астрономии в течение жизни нынешнего поколения окажется чем-то поразительным. В 1832 г. профессору Эйри в докладе Британской ассоциации по продвижению науки об успехах и состоянии тогдашней астрономии пришлось признать свою неспособность [признать невозможность] сказать что-либо о практической астрономии в США, потому что он не знал в нашей стране ни одной действующей обсерватории. В начале 1840-х годов в стране не было ни единой обсерватории, которая могла бы заявить, что по полноте своего инструментария далеко ушла от частного собрания инструментов 60-летней давности у Риттенхауса.

Влияние большой кометы 1843 г. и интерес к астрономии нескольких офицеров военно-морского флота, равно как и так или иначе возбужденной широкой общественности, привели к постройке и частичному или полному оборудованию намного большего числа обсерваторий, чем могло было быть использовано при находящихся в распоряжении ограниченных средствах. Как высоко ни должны мы оценивать широкие взгляды и общественный дух, которые побудили к этой деятельности, нельзя не сожалеть об отсутствии глубоких знаний, отчего и произошла такая потеря ценных средств. Будь все деньги, израсходованные таким образом в рассеянных усилиях, сосредоточены на постройке двух или трех крупных обсерваторий, они проложили бы нам большую часть пути к первому месту в мире в астрономической науке.

Недавнее исключительное продвижение, которое мы упоминаем, не ограничено определенными науками; можно сказать, что оно включает всё оборудование для проведения всевозможных исследований, а также и доскональное научное образование. Наши более значительные химические лаборатории и лучшие научные учреждения, возможно за единственным исключением, так же новы, как наши обсерватории. Если всмотреться в наши музеи и лаборатории и подметить деятельность, проявленную первыми в сборе всего, что может пояснить биологию, этнологию и археологию нашего материка, а вторыми – в обучении молодых людей [?], мы с безоговорочным удовлетворением увидим сильную сторону нашей науки.

Можно почувствовать какое-то сожаление или унижение при мысли о том, что не таким было развитие за столетие и что за бóльшую часть нашего национального существования у нас не было ничего подобного. Зато нынешнее время сможет приписать себе еще больше заслуг за достижение всего, а подразумеваемое быстрое продвижение позволит нам еще более надеяться на будущее. Всё еще ограничивая свое внимание светлой стороной и имея в виду ту национальную энергию, которая была израсходована при нашем развитии, можно вообразить, что вскоре наступит день, когда мы станем ведущей научной нацией мира.

[18] Но при переходе от материальной стороны дела к миру идей и рассматривая вместо обсерваторий, телескопов, лабораторий, музеев и исследователей успехи в научной литературе и в научных идеях, противоречие окажется болезненно поразительным. Не только не видно продвижения, соответствующего материальным успехам, но потребуется большое трудолюбие и старания, чтобы подметить какое-либо существенное улучшение.

Если пояснить сказанное лишь на примере точных наук, для которых ведущим средством исследования является математика, сравнение быть может не будет считаться вполне справедливым. Выберем поэтому науку, которая находится в пределах возможного для всякого мыслящего ума. Ни одно научное движение в современном мышлении не было столь революционным само по себе или столь плодотворным по своим результатам, как вызванное дарвинизмом. И возможно, что он возбудил здесь такой же интерес, как и в любой другой стране. Это учение проникло и к нашим, и к английским и немецким естествоиспытателям, а литература о нем возможно нашла у нас столько же читателей, сколько в Англии. Так каков же наш вклад в нее?

Нам известны только трое или четверо американских авторов, которые хоть что-то добавили в нее, двое из них, Чойнси Райт и Джон Фиске, – в этом же журнале. Кроме *Космической философии* Фиске [1903], – обширного обзора темы, для которой дарвинизм явился одной из важнейших составляющих, – по эту сторону Атлантики еще не появилось ни одного независимого труда о нем. Намного бóльшую часть журнальных набросков и рецензий опубликовали Райт и профессор Аса Грей. На научных основаниях противниками этого учения были Агассис и Bowen, который считал дарвинизм "последней опубликованной формой теории развития" (*Mem. Amer. Acad. Sci.*). Полагаем, что мы упомянули всех видных американских авторов, внесших вклад в научное мышление по указанной теории, если не причислять к ней чисто технических исследований фактов естественной истории.

В этой связи возможно будет нелишне напомнить читателям, что доводы о том, что дарвинизм либо губителен для религиозной веры, либо нет, равно как и атаки на него и его защита, основанные на религиозных соображениях, нельзя полагать вкладом в науку по этой теме; однако, труд, задуманный как чисто научное доказательство несостоятельности этого учения, не будет исключаться [только] ввиду своей направленности. Возможно, что в литературе первого типа мы в некоторой степени заметны. И если сравнить количество наших публикаций по дарвинизму с немецкими, то различие окажется поразительным. Не проходит и года, чтобы немецкие издательства не выпустили в свет более обширной философской литературы о нем, чем американская пресса могла бы предъявить за все 16 лет, прошедшие после появления [в 1859 г.] *Происхождения видов*. Отойдя от этого обескураживающе малого количества, можно будет найти утешение и надежду от рассмотрения качества наших публикаций. По философскому пониманию, научной точности и ясности мысли очерки Райта и Грея вполне могут возглавить список публикаций при соревновании всех наций.

Сказанное о литературе по дарвинизму верно для каждой отрасли чистой науки. Не только наша научная литература каждого вида исключительно скудна, но и возможности для любых публикаций крайне ограничены, и за последние 50 лет они возросли лишь немного. Как и 50 лет назад, *American Journal of Science* является нашим единственным стандартным журналом чистой науки. Возможности для публикации материалов увеличились у наших научных обществ никак не пропорционально увеличению материального оборудования. Как можно это объяснить? Почему громадное возрастание средств исследования не сопровождалось соответствующим возрастанием научных публикаций и дискуссий? Противоречие было вызвано различными обстоятельствами, часть которых связана с общим состоянием научного мышления у нас, другие же могут быть разъяснены только сравнением возможности публикаций у нас и в других странах.

В других мыслящих странах большая доля публикуемых научных исследований появляется в трудах научных обществ, и сравнение возможностей этих и наших обществ сразу же частично объясняет дело. На континенте Европы научные общества находятся под непосредственным покровительством своих правительств, которые и оплачивают публикацию их трудов. Здесь же нам известен только один штат, который взял на себя покровительство науке, и вероятно многие читатели удивятся, что им оказался Висконсин[17]. Возможно, что и некоторые другие штаты поступают так же, но нам об этом ничего не известно.

[19] Лишенные помощи штатов, наши общества должны полагаться на свои собственные ограниченные возможности публикации. Учитывая широко распространенный интерес к науке и ту легкость, с которой общества всех видов исключая научные, могут собирать средства для достижения своих целей, скудость этих возможностей в большинстве случаев в сильнейшей степени поражает.

В одну-единственную скаковую лошадь или гоночную яхту вкладывают больше денег, чем все научные общества страны могут собрать за год. Наберется, вероятно, не более трех или четырех таких обществ, весь годичный доход которых смог бы покрыть обычные призы пары первоклассных боксеров; мы не уверены, что было бы преуменьшением сказать, что есть только одно столь богатое общество.

Надо признать, что имеются точки зрения, с которых наши притязания на название мыслящей нации действительно выглядят весьма слабо. Можно только надеяться, что администрации штатов обратят больше внимания на вопрос о помощи научным обществам с публикацией их исследований. И мы можем заметить здесь, что более просвещенные иностранные правительства не ограничиваются своей помощью таким обществам, но в какой-то мере покровительствуют и журналам по абстрактным наукам, издаваемым отдельными лицами. Нет, возможно, ни одного органа или учреждения, которое за последние полвека больше способствовало бы развитию математической науке в Европе, чем журнал Крелле *Journal für die reine und angewandte Mathematik* в Берлине. Но он вряд ли смог бы продолжать выходить без поддержки, которую оказывают ему прусские власти.

Если внимательно вдуматься, почему администрации штатов и наше правительство по существу меньше способствовали науке, чем соответствующие власти других стран, то вероятно выясним, что причиной была не меньшая склонность к щедрости по отношению к ней, а столь плохое общее понимание ее нужд и ее связи с общественным благосостоянием. Это, в свою очередь, могло быть частично вызвано существующим у нас сравнительно широким разрывом между слоем политиков и деловых людей с одной стороны, и литературным и научным сообществом с другой. В нашей стране заведомо реже, чем за рубежом, можно увидеть человека, активно участвующего в общественной жизни и живо интересующегося продвижением науки. В Англии многие ведущие лица нации являются членами Королевского общества, посещают его общественные, если и не научные собрания и заинтересованы во всеобщем благополучии.

Здесь, наука считается неким занятием духовенства[18], в чью таинственную область политик вряд ли вздумает проникнуть скорее, чем взобраться на кафедру проповедника. Единственное исключение заметно на собраниях Американской ассоциации способствования науке, крупного и хорошо известного общества, которые часто посещают проживающие неподалеку служащие государства или администрации штатов. Существуй на самом деле как бы духовенство, состоящее из людей науки, будь возможным увидеть влиятельное сообщество людей, ревностно преследующих общую определенную цель, положение было бы намного лучше нынешнего. Объединенное сообщество лиц, обладающих обычным дарованием наших ученых и убежденно работающих совместно, не могло бы не стать заметным.

На самом же деле мы не находим в нашей стране объединения или группы лиц ни в научных кругах, ни вне их, настолько же серьезно заинтересованных в американской науке ради нее самой, насколько интересуются наукой своих стран их крупные сообщества мыслящих людей. Отдельных лиц, проявляющих подобный интерес, у нас достаточно много, но до сего времени они были лишь обособлены и инертны, слишком разобщенными, чтобы действовать каким бы то ни было образом совместно.

[20] Но, взглянув на другие мыслящие страны, мы видим, что положение дел там совершенно иное. Во Франции, в Англии и в Германии существуют сообщества людей, обладающих общественным и политическим весом, способные собирать средства и гордящиеся интеллектуальными успехами своих стран. Объединенными усилиями они оказывают мощное влияние, побуждая к научным исследованиям. Один или два примера глубокого отличия в этом отношении между нашей собственной страной и Англией прояснит смысл сказанного нами лучше, чем целые страницы общего описания.

Там одной из задач научных обществ, и по сути дела той, на которую обращается больше всего внимания, является предоставление информации об успехах науки и о работе исследователей. Простительный патриотизм, сопровождаемый желанием доставить удовольствие слушателям, приводит к тому, что докладчики и авторы в основном сообщают о трудах своих сограждан. Такая односторонность нередко навлекает суровую критику иностранцев ввиду нелепых притязаний от имени английской науки. Но достаточный ответ на это можно видеть в том, что критикуемые выдержки предназначаются исключительно для англичан, собравшихся поздравить друг друга с прогрессом английской науки, равно как и науки вообще[19].

Немец постыдился бы признаться в какой-либо предвзятости к трудам своих соотечественников. Описывая успехи познания, он тщательно распределяет заслуги вне зависимости от национальности между теми, кто их достоин, желая, чтобы никто не смог установить страну происхождения по тому ученому, чьи труды он описывает. В США нет никаких организаций и никакого издания, куда общественность могла бы обратиться за авторитетной информацией подобного рода. Уходящие президенты

Американской ассоциации способствования науке неизменно были обязаны выступать с речью, однако обычно они не посвящали ее обзору научных успехов ни в США, ни где-либо еще.

Исключение тем не менее произошло на собрании в Хартфорде в 1874 г., когда президент выступил с весьма хорошо составленным обзором недавних достижений в физической науке. Однако, не будучи ни пристрастным на английский манер, ни непредвзятым как немец, он тщательно избегал всякого упоминания о трудах и исследованиях своих сограждан. Слушатель должен был заключить, что американской науки как таковой вообще не существовало. Среди самых успешных ученых в областях, относящихся к некоторым темам доклада (например, к звуку, скорости электрического тока, спектральному анализу и астрономическим исследованиям), были американцы, но о них совсем ничего не было сказано. Если их всего немного, и знают о них здесь не так хорошо, как за рубежом, то тем более следовало сделать упор на их исследованиях. Подобный доклад аналогичному обществу в Англии был бы немыслим ввиду благотворного страха докладчика быть затравленным газетчиками.

Впрочем, мы имеем в виду в качестве примера величайшей помехи, которую нашей науке пришлось преодолевать, не сам доклад, а его восприятие прессой и обществом. Литературные достоинства доклада были высоки и обеспечили ему широкое освещение и некоторые благоприятные комментарии прессы, однако никто не обратил ни малейшего внимания на то, как была забыта американская наука. Никто не спросил, не является ли наука чисто европейским явлением. Слушатели и читатели пришли к логическому заключению о том, что наша страна за всю свою историю не произвела ничего, достойного упоминания, и они восприняли это как нечто, само собой подразумеваемое и не требовавшее даже мимолетного размышления.

[21] Поражающий пример энергии и предприимчивости виден в том, что американской Береговой съемке было предназначено произвести позднейшее и лучшее определение разности долгот двух старейших и великих европейских обсерваторий, Гринвичской и Парижской. Эта задача явилась лишь побочным результатом определения других долгот, что не умаляет ее значимости. Оказалось, что два определения разности долгот [одного и того же пункта] через Атлантический океан относительно Гринвича и Парижа не соответствовали друг другу, а при измерении третьей стороны треугольника, т. е. разности долгот Гринвича и Парижа, оказалось, что выявленная разность определений была вызвана погрешностью прежнего определения последней разности. Другими словами, долгота Парижа, определенная по телеграфу через Атлантику относительно Гринвича, а затем обратно через океан, была точнее, чем найденная прежде по телеграфу по непосредственному измерению разности долгот Гринвича и Парижа.

Теперь посмотрим на это с другой стороны. Сочетание мастерства и дипломатии, которое обеспечило успех дела, – ведь легко понять, что в подобных предприятиях некоторая дипломатия необходима, – так и не получило ни малейшего признания общественности. Когда исполнители высадились дома на берег, их не встретил никакой комитет, как это произошло бы, будь они успешными стрелками; их не разыскал даже самый предприимчивый репортер. Не было ни следа неподобающего национального восхваления, которому, как иногда полагают, обыкновенно предаются наши сограждане[20].

История и результаты экспедиции должным образом замурованы в подобающих официальных фолиантах, но так и не нашли пути к публикации для общественности, кроме быть может в мелком шрифте специального выпуска газеты *New York Tribune*. Число лиц, которые когда-либо узнали об этой работе, слишком незначительно, чтобы считаться общественностью, и еще меньше тех, кто еще помнит о ней.

Из всего этого нельзя сделать вывод, что американский народ не заинтересован в науке, можно только заключить, что этот интерес не проявляется таким образом, чтобы содействовать научным исследованиям. Крупный успех некоторых научно-популярных изданий, особенно дешевых, публикуемых упомянутой газетой, показывает, что должен существовать обширный круг читателей, которые нетерпеливо покупают их. Было бы интересно точно выяснить, как распределяются эти читатели по различным слоям общества.

Учитывая незаинтересованность в науке лиц, ведущих активный образ жизни, есть некоторые основания полагать, что среди указанных слоев как правило не окажется ни влиятельных, ни наилучше образованных лиц. Будь возможен сбор статистических данных о читателях, мы наверное установили бы, что степень умственных способностей, которая склоняет людей к познанию посредством такой литературы, соответствует той, которая необходима для ощущения чудесного.

Совершенно невежественный человек наверняка нисколько не заинтересуется наукой, а наиболее образованный окажется настолько осведомленным о ней, или по меньшей мере о некоторых ее сторонах, что она не будет обладать для него обаянием новизны. Между этими двумя крайностями мы легко можем представить себе того, для кого открытия химика и астронома, описанные без применения технических терминов, покажутся чем-то похожим на волшебные сказки.

[22] Описанные нами помехи успехам науки – те же, что и повсюду в нашей нации задерживали развитие высших форм мышления. Наше национальное мышление в основном поверхностно; ее низшие формы намного выше, а высшие – ниже, чем в других странах. По широте своих взглядов мелкий лавочник в Англии намного отстал от своего американского собрата, но у тех, взятых совместно, кто домогаются возглавить общественное мнение, взаимное положение противоположно[21]. И это усматривается не только по отношению к физическим наукам, но вообще в приложении научных методов к занятиям в жизни. Здесь, как и в других делах, коль скоро требуется только обычный здравый смысл, мы далеко впереди, но мы тем более отстаем, чем всматриваемся в проблемы, требующие более высоких форм мышления.

Немного существует приложений научного метода, которые оказывали бы пользу человечеству более длительное время, чем современная экономика, и ни одно из них не сделало так много для того, чтобы распространить американские понятия о правлении и обществе. Было бы и приятно, и подходяще видеть в ней результат американской мысли, но только ничего подобного на самом деле не произошло; сомнительно даже, чтобы можно было утверждать, что важный вклад в нее был когда-либо сделан по эту сторону Атлантики. У нас есть некоторое число элементарных трактатов на эту тему, и какие-то из них действительно отличные, но ни один нисколько не притязает на то, чтобы считаться оригинальным вкладом в экономику.

Единственный автор, который когда-либо хотя бы поднял рябь на поверхности экономической мысли, это Кэри, но его методы и результаты настолько отличны от тех, при помощи которых развивалась эта наука, что трудно предоставить ему место среди экономистов. Это можно было бы по справедливости сделать только, если ограничиться содержанием его исследований и отбрасывать его методы, считая их несущественными. Относительное число наших читателей, чье мнение о его системе не сложилось окончательно, так незначительно, что ее подробная критика маловажна, либо даже вообще неуместна. Мы упоминаем его потому, что приходится выбирать между объявлением его великим представителем американской экономики и признанием, что у нас нет ее собственной системы[22].

Из нашего обзора будет видно, что нам следует принять весьма различные оценки по отношению к прошлому и будущему американской науки в соответствии с выбранными нами мерилом и точкой зрения. Рассматривая благосостояние (wealth) и силу наших научных организаций и объем их публикаций, – т. е. имея в виду лишь общее число опубликованных оригинальных исследований, – наиболее подходящим будет признать прошлое со смирением, а будущее – с отчаянием. Но если принять во внимание не только количество, но и качество, можно будет набраться смелости, потому что станет ясно, что относительное количество бесполезного или несущественного у нас намного меньше, чем в других странах.

Изучение этого вопроса покажет, что это происходит по той же причине, по которой число оригинальных исследований незначительно, а именно потому, что действительно выдающиеся исследования вознаграждаются у нас меньше, чем за рубежом. Поэтому оказалось неизбежным, что природа у нас изучается ради нее самой в большей степени, чем в других странах, и что между людьми, стремящимися лишь к положению или репутации в обществе, соперничества меньше[23]. В какой бы степени недостаточность такого вознаграждения ни удерживала ученых первого ранга от оригинальных исследований, она гораздо сильнее действует на второклассных и таким образом повышает среднее качество нашей науки. И опять же, если принять во внимание умственную энергию, выявляемую самыми способными из наших людей, и, мы почти можем сказать, ту национальную энергию, с которой проводились научные исследования в определенных направлениях в течение последних 30 лет, вполне может показаться возможным, что не в столь отдаленном будущем она сделает нас вождем мировой науки.

Каковы условия для осуществления такого предсказания, и каковы виды, что они окажутся выполненными? Наши научные силы несколько напоминают армию, здоровых и храбрых солдат, хорошо вооруженных в некоторых отношениях, но совсем не снаряженную в другом, потому что занималось ей очень щедрое правительство, совершенно невежественное в нуждах армии. Каждая рота сама по себе воюет прекрасно, но армия в целом неумела ввиду плохого командования и партизанщины. Общество очень мало смыслит в военном деле и при представлении к наградам на него сильнее влияет бравый вид солдатских усов, чем действия солдата в бою.

[23] Главное, в чем мы нуждаемся, это лучшее понимание потребностей науки теми, кто выделяет деньги на ее продвижение. С материальной стороны нам сейчас не нужно ничего нового; в течение жизни нынешнего поколения не потребуется новых музеев, обсерваторий или лабораторий. Но что нам действительно нужно, можно усмотреть, как мы пытались указать, по изучению логических связей между несколькими нашими недостатками. Нам недостает лиц, всерьез преданных научным исследованиям более высокого порядка, общественного признания трудов тех, кто ими занимается, механизма ознакомления общественности с работами и нуждами таких лиц и материальных средств для публикации их исследований. Каждый из этих недостатков является до некоторой степени и причиной, и следствием остальных. Недостаточное признание и недооценка частично вызваны плохой системой и организации [?], а частично – малым числом научных публикаций.

Малочисленность исследований в основном порождена их недостаточным признанием и недооценкой. Исправление любого из этих недостатков в некоторой степени выправит все остальные, и до тех пор, пока хотя бы один не будет исправлен, нет смысла надеяться на какое-то существенное улучшение положения. В других интеллектуальных странах у науки есть кормилица; в Германии – университеты, во Франции – правительство, а в Англии – научные общества. Если нашей науке удастся подыскать себе такую, она быстро расцветет, но рассчитывать она может только на просвещенную общественность. И если этот слой сограждан сможет как-то открыто и официально выражать свою великодушную оценку трудов американских исследователей, это окажется лучшим начинанием в удовлетворении всех нужд нашей науки.

Сравнительно не так важно, в какой именно форме подобное признание должно проявляться, но самой естественной, видимо, было бы присуждение время от времени медалей или свидетельств авторам существенных опубликованных исследований. Таких свидетельств по возможности общенационального характера не должно быть слишком мало, потому что это отбило бы охоту соревноваться у большого числа исследователей. И по сути дела хорошо бы основной целью выдачи свидетельств сделать поощрение начинающих[24].

Другим способом самого действенного оказания помощи малыми средствами была бы поддержка двух или трех первоклассных журналов, посвященных точным наукам. Мы говорим *точным наукам*, потому что это та область знания, которая ныне обеспечена хуже всего. Если принять математику за одну крайность, а медицину – за другую, мы сможем недурно оценить точность каждой науки по той трудности, с которой ее работники встречаются при поддержке своих журналов [общественностью]. Может показаться нелепым, если сказать, что наши нужды здесь будут вполне удовлетворены ежегодной суммой в пять или шесть тысяч долларов, и что надежды на будущее математических наук в нашей стране в очень большой степени зависят от возможности математиков собирать эти деньги для указанной цели.

В общем, нам не удалось представить первое столетие нашего существования в розовом цвете, и, хоть мы вполне можем с надеждой смотреть в будущее, полной уверенности в нем у нас нет. Если спросить, что это означает, мы сразу же окунемся в проблемы, которые мыслитель и человек дела могут обсуждать бесконечно, но на которые нельзя дать такой ответ, с которым все согласились бы. Признается, что если учитывать только общее высокое качество и успехи нашей прикладной науки; если вдуматься, как хорошо мы применили открытия, сделанные другими, доведя их до железных дорог, мостов, телеграфа, заводов, машин и оружия, – то у нас окажутся все основания радоваться. Разве этого недостаточно, чтобы удовлетворять нас?

Положение наций в мире зависит только от действенности их пушек, и так оно и будет надолго; мыслящая нация является передовой только потому, что лучше всех умеет ковать оружие. Так сто́ит ли тогда выбирать для себя какое-либо иное мерило? На несколько более возвышенной основе для наших исследований можно сказать, что основным понятием нашей социальной системы является наивысшее счастье наибольшего числа граждан, и если рассудок нации развивается удовлетворительно, то нельзя ли будет обойтись без философов любой окраски? Допустим, что у нас полностью исчезнет способность к более высоким формам точного мышления, не окажется ли возможным, что нас постигнет какое-либо неожиданное бедствие, или что наша национальная жизнь постепенно придет в упадок? Или, если, поднимаясь над всеми соображениями об одной лишь пользе, мы начнем оценивать интеллектуальное положение, на которое мы как нация имеем право, не должны ли мы будем принять какое-либо неблагоприятное заключение из отсутствия более высоких форм мышления?

Можно утверждать, что число лиц в каждом поколении, способных оставить постоянный след в литературе, науке или искусстве данной нации, на самом деле по необходимости очень невелико, так на самом деле невелико, что их наличие или отсутствие вряд ли будет ощутимо при оценке среднего интеллекта нации. Тот факт, что примерно двух десятков лиц, необходимых для того, чтобы показать нашу страну в блестящем интеллектуальном свете, возможно нельзя будет отыскать, ни в какой мере не ухудшит среднего умственного уровня двадцати или тридцати миллионов жителей[25]. С этой точки зрения нация, каждый член которой, от законодателя до поденщика, может прочесть и оценить Платона, окажется величайшей интеллектуальной страной мира, даже если в ней не заметно начала собственной мыслящей жизни. С той же позиции сообщество, в котором каждый получил хорошее восьмиклассное образование, окажется наилучше образованным в мире, хотя бы ни один человек даже и не заходил ни в какой колледж.

Обсуждать оценку умственного состояния подобных сообществ было бы пустым словоблудием, а оспаривать желательность основательного образования каждого члена сообщества, даже самого скромного из них, означало бы выступать против идеи всеобщего распространения высших средств счастья, на которой основано наше общество. И всё же, нисколько не порицая состояние общества, в котором каждый крестьянский парень мог бы читать Платона, мы обязаны указать, что при этом не будут удовлетворены все потребности нашей цивилизации. В ее сложных процессах мы можем усмотреть ту же необходимость в разделении труда и тот же отказ от требования, чтобы каждый умел делать всё, какие мы видим уже в промышленности.

На фабрике высшая производительность достигается при должном соотношении между всеми видами производительных способностей от мастерства одного-единственного управляющего до мастерства тысячи станочников. И таким же образом должное продвижение нашей цивилизации требует стройного сотрудничества умов многих порядков, каждого из них в нужном числе. Ее ход происходит наиболее действенно, когда каждый член общества может выполнять свои конкретные обязанности по отношению к своим согражданам самым лучшим образом и когда каждый делает всё необходимое для общего продвижения. Как бы желательным ни было, чтобы каждый был способен заниматься как можно более разнообразными делами, потребности общества в целом не выходят за указанные нами рамки. Та нация станет продвигаться наиболее быстро, государственные деятели которой обладают наибольшей умственной силой, а чернорабочие – самыми крепкими телами. Последним не более необходима голова государственного деятеля, чем первым – умение обращаться с лопатой.

[24] Теперь можно заметить, что хотя указанное нами пренебрежение философскими исследованиями быть может не ослабит нашей оценки среднего американского интеллекта, оно свидетельствует о крупном недостатке в одном из условий успеха нашей цивилизации. Научные исследования и наличие тех идей, на которых она основана, связаны так крепко, и они настолько положительно влияют друг на друга, что их нельзя разделить. То обстоятельство, что очень малого числа исследователей достаточно для построения и сохранения науки данной страны, не должно затмевать для нас значения их труда.

Будь возможным сосчитать тех, чья смерть в колыбели привела бы к продолжению темных времен с конца X в. до нынешних дней, – тех оригинальных умов, чьи мысли заквасили всю нашу массу, – мы установили бы, что их число страшно мало. Но эта малость, и их влияние, оказанное столь таинственными для обычного ума путями, что проследить их невозможно, естественно приводят к общей недооценке их действия.

Посещая фабрику, поверхностный наблюдатель замечает только видимые в ней операции и может легко склониться к мысли, что простейший механический труд является единственным важным средством для пуска ее в ход и обеспечения ее работы. Профессиональное мастерство нескольких человек, без которого большая часть станочников могла бы с таким же успехом шататься по городу или заниматься менее оплачиваемым трудом, остается на самом краю его поля зрения. Еще хуже он замечает мастерство изобретателя, который разработал видимые им механические операции, и уж совершенно вне его видимости остается гений физика, открывшего физические законы, на которых основано это изобретение.

Примерно таково же мнение о различных элементах нашей социальной организации у тех, широта познаний и глубина восприятия у которых не позволяет им проследить за всеми причинами, действующими в обществе. Мы знакомы со слоем тех, кто не видит в обществе ничего, кроме работы физического труда. Другой слой с более широким полем зрения способен усмотреть задачи управляющих и капиталистов, без которых не было бы никакой возможности действенного труда. А слой тех, кто может полностью охватить задачи людей чисто умственного труда, еще тоньше. Не потому, что эти люди считаются вообще бесполезными обществом в целом, а потому, что существует неправильное мнение об их задачах.

Для обычного смышленого гражданина философские мысли и научные исследования, если они не направлены непосредственно к некоторой очевидной практической цели, являются лишь украшением, фактически отделкой социального здания. С этими украшениями он быть может не захочет с готовностью расставаться, но ценит он их лишь как таковые, а если что-то должно быть обрублено, он слишком сильно склонен пожертвовать ими в первую очередь.

[25] Из ложных идей, пропитывающих общество, нет никаких, искоренение которых было бы важнее, чем подобная идея о точном мышлении. Из всех недостатков, которыми страдает наше общество, самым существенным является недостаточное распространение идей и методов мышления точных наук, и нет ничего более ошибочного, чем сведение результатов точного мышления к украшениям. Большая доля наших общественных занятий состоит в изучении и обсуждении социальных явлений, при которых никаких определенных выводов нельзя сделать без логической точности исследования, совсем чуждой повседневной жизни.

Каждое поколение решает исследовать для себя основания общества и управления им и сильно предрасположено к тому, чтобы избавиться как от хлама от всего того, что представляется помехой прогрессу и не имеет видимой пользы. Каким только опасностям мы ни подвергались бы, совершайся перестройка неумелыми руками, под руководством лиц, не только не знающих социальных законов, но и не способных ни к какому точному мышлению! Чтобы обезопасить себя от бедствия требуются не просто технические исследования, но и обучение нашей мыслящей и влиятельной общественности такой дисциплине, как логика Милля [1843][26], поясненная методами и результатами научных исследований.

Нынешнее мощное движение в пользу научного образования приведет к прекрасному результату, если оно поможет направить умы подрастающего поколения скорее к научным методам и способам их приложения к изучению социальных законов, чем к технической стороне науки или к ее практическому приложению к обычным операциям в промышленности.

Самый поверхностный наблюдатель не преминет заметить, что следует восполнить некоторый недостаток того типа, который мы указываем. Он видит, что сотни государственных деятелей, ораторов, газет и журналов ежедневно обсуждают проблему денежного обращения. Он знает, что их слова отскакивают от ушей общества по той простой причине, что ораторы и авторы не могут убедить его в том, что действительно знакомы с этой темой или способны ясно представить себе те вопросы, которые там возникают. И таким образом полная бесплодность всей массы доводов становится ему совершенно ясна. Но он видит лишь очень смутно или вообще не видит, что всё это происходит от отсутствия какого-либо систематического логического метода в тех [мысленных] процессах, при помощи которых спорящие друг с другом подходят к своим выводам; а полностью вне его видимости остается вопрос, как следует овладеть подобным методом. Если же он представляет себе это, то уж наверное не станет полагать философское мышление лишь украшением.

С этой точки зрения наука проявляет себя как система широкого национального образования, которую следует поддерживать по той же причине, по которой поддерживается широкое образование одного человека. Без него мы пострадаем точно так же, как страдает человек, занимающийся делом, основные принципы которого он не понимает. Мы должны полагать, что занятия наукой в широчайших пределах совершит для будущего то же, что знания математики обеспечивают инженеру, химии – врачу или механики – архитектору. Задача науки – не просто установить эмпирические правила для руководства нами, а бросить самый яркий свет на трудную дорогу, по которой мы должны будем идти, руководствуясь своим собственным наилучшим суждением. С помощью науки эту дорогу быть может трудно будет иногда отыскать, но без нее нам придется ощупывать свой путь в полной темноте.

Примечания

1. Мнение о подобном различии умственных способностей было достаточно распространено. Дарвин (1881/1903, с. 54) выразил желание статистически проверить "истину часто повторяемого утверждения о том, что цветные дети учатся вначале наравне с белыми, но затем отстают". Впрочем, следовало бы добавить: при равных социально-экономических условиях жизни. О. Ш.

2. Здесь и ниже рассуждение автора о различии между английской и французской науками неубедительны. Во-первых, требовалось бы социологическое исследование (ср. Прим. 1), а не ссылка на горстку гениев; во-вторых, возможные отличия вполне могли бы быть объяснены особенностями в национальных системах школьного и высшего образования и, в частности, соответствующими отличиями в упоре на чистую и прикладную науку. О. Ш.

3. Мы можем лишь предположить, что автор имел в виду косвенное "использование силы притяжения", а именно уточнение теории движения Луны, ставшее возможным после Ньютона. Вообще же за изобретение весьма точного для своего времени хронометра награду в середине XVIII в. получил Джон Харрисон (*Dict. Nat. Biogr.*, vol. 9, 1950). О. Ш.

4. В России дарвинизм с 1864 г. пропагандировал Тимирязев. О. Ш.

5. Автор неоднократно упоминает эти три "ведущие интеллектуальные нации". Он безусловно знал о многих российских ученых (о Лобачевском, Чебышеве, Менделееве, Струве), но Россию так и не назвал, возможно потому, что не смог бы охарактеризовать российскую науку. Уместно заметить (Benjamin 1910, с. 379), что в 1887 г. Александр II распорядился нарисовать портрет Ньюкома и выставить его в галерее знаменитых астрономов в Пулково, а через два года послал ему от имени обсерватории яшмовую вазу на мраморном пьедестале. О. Ш.

6. Это сравнение можно усилить: "отбросов" в науке несравненно меньше, чем пустой породы при добыче золота. О. Ш.

7. Мнение автора оказалось верным лишь в целом, достаточно вспомнить о появлении теории относительности. О. Ш.

8. Франклин учредил Американское философское общество в 1745 г. О. Ш.

9. Декларация независимости была принята в 1776 г.; Англия признала независимость США в 1783 г. Чуть ниже Ньюком приводит цитату без указания источника. О. Ш.

10. В п. 5 автор упоминал дерево, посаженное одним только Франклином. О. Ш.

11. Приведем здесь список ученых (кроме самых известных), которых автор упоминает в своем обзоре.

Agassiz J. L. R., Агассиз Ж. Л. Р. (1807 – 1873), швейцарский естествоиспытатель. В США с 1846 г. **Bache A. D.** (1806 – 1867), физик, правнук Франклина. Первый президент Национальной академии наук. **Bowditch N., Боудитч Н.** (1773 – 1838), астроном. **Bowen F.** (1811 – 1890), биолог. **Carey H. Ch., Кэри Г. Ч.** (1793 – 1879), экономист. **Fiske G., Фиске Дж.** (1842 – 1901), историк и философ. **Franklin B., Франклин Б.** (1706 – 1790), просветитель, ученый, государственный деятель. **Gray A., Грей А.** (1810 – 1888), ботаник. **Hansen P. A., Гансен П. А.** (1795 – 1874), астроном. **Hassler F. R., Хаслер Ф. Р.** (1770 – 1843), геодезист. **Henry J., Генри Дж.** (1797 – 1878), физик, первый председатель Американского философского общества. **Jussieu A. L., Жюсьё А. Л.** (1748 – 1836), ботаник. **Mitchel O. M., Мичел О. М.** (1809 – 1862), астроном. **Rittenhouse D., Риттенхаус Д.** (1732 – 1796), часовых дел мастер, астроном, геодезист, математик. **Wright Ch., Райт Ч.** (1830 – 1875), физик и философ. О. Ш.

12. Блестящими исключениями являются династии Бернулли и Струве. О. Ш.

13. Гансен был выдающимся астрономом, но не преувеличил ли автор его значения? О. Ш.

14. Подстрочники до сих пор используются при переводах. По существу же представляется, что автор принизил значение перевода Боудитча, который, естественно, смог несколько подновить изложение Лапласа и в некоторых местах добавлял свое мнение о предмете. Так, в § 40 т. 2, с. 434 перевода в его издании 1966 г. Боудитч сравнил друг с другом два метода уравнивания градусных измерений. Русский перевод *Небесной механики* Осиповского остался в рукописи (Кравец 1955). О. Ш.

15. Береговая съемка (Survey of the Coast) была учреждена в 1807 г., несколько позже переименована в Coast Survey, а в 1878 г. стала называться Береговой и геодезической съемкой (Coast and Geodetic Survey) с возложением на нее основных геодезических и картографических работ в стране. Автор упоминает ее ниже. О. Ш.

16. Территориями назывались районы, не получившие еще статуса штата. О. Ш.

17. Мы можем лишь заметить, что штат Висконсин оставался *территорией* вплоть до 1848 г. О. Ш.

18. Здесь и чуть ниже автор употребил термин *priesthood* в его обоих значениях, в первом случае в смысле занятия духовенства, а во втором – как духовенство данной области, взятое совместно. О. Ш.

19. Это объяснение неубедительно. О. Ш.

20. Невольно вспоминается несколько более поздний рассказ Чехова (1886), описывающий аналогичное положение в России: мало кто слыхал об отечественных ученых и инженерах, зато очень многие знали об "успешных стрелках". О. Ш.

21. Вряд ли можно безоговорочно согласиться с подобным выводом, никак не обоснованным социологическими исследованиями, ср. Прим. 2. О. Ш.

22. Сам Ньюком опубликовал большое число важных работ по экономике, из которых здесь достаточно назвать одну (1886) и указать, что Фишер (1909) посчитал, что многие из них спорны. О. Ш.

23. Мы склонны повторить сказанное в Прим. 2 и 21. О. Ш.

24. Именно такова нынешняя практика. Заметим, что в 1912 г. Карл Пирсон (E. S. Pearson 1936 – 1937/ 1937, p. 194) отказался от присужденной ему награды за заслуги в области биометрии, считая, как и Ньюком раньше него, что награждать следует молодых исследователей. О. Ш.

25. В 1850 г. население США составляло 23*млн* человек (БСЭ, 3-е изд., т. 24/1, 1976, с. 79). О. Ш.

26. Позволим предположить, что для развития логического мышления достаточно вдумчивого изучения любой отрасли науки, недаром говорят *думающий врач*. Выражение "более высокие формы мышления" автор применяет неоднократно, но так и не описывает их. О. Ш.

Библиография

Кравец И. Н. (1955), *Т. Ф. Осиповский*. М.

Чехов А. П. (1886), Пассажир первого класса. *Собр. соч.*, т. 4. М., 1955, с. 382 – 389.

Benjamin M. (1910), Simon Newcomb. В книге *Leading American Men of Science*. Ред. D. S. Jordan. New York, pp. 363 – 389.

Darwin C. (1881), Письмо. В книге автора *More Letters*, vol. 2. London, 1903.

Fisher I. (1909), Obituary. S. Newcomb. *Econ. J.*, vol. 19, pp. 641 – 644.

Fiske G. (1903), *Outlines of Cosmic Philosophy*, vols 1 – 4. Boston.

Laplace P. S. (1798 – 1825), *Mécanique céleste*, tt. 1 – 5. *Oeuvr. Compl.*, tt. 1 – 5. Paris, 1878 – 1882. Англ. перевод: *Celestial Mechanics*, vols 1 – 4, 1829 – 1839. Его перепечатка: New York, 1966.

Mill J. S., Милль Дж. С. (1843, англ.), *Система логики*. СПб, 1914. [*System of Logic. Coll. Works*, vol. 8. Toronto, 1974.]

Newcomb S. (1886), *Principles of Political Economy*. New York.

--- (1891), Measures of the velocity of light. *Astron. Papers*, vol. 2, pp. 107 – 230.

--- (1894), The elements which make up the most useful citizen of the United States. *Anthropologist*, vol. 7, pp. 345 – 351.

Pearson E. S. (1936 – 1937), Karl Pearson. *Biometrika*, vol. 28, pp. 193 – 257; vol. 29, pp. 161 – 248.

Sheynin O. (2002), Simon Newcomb as a statistician. *Hist. Scientiarum*, vol. 12, pp. 142 – 167.

XIX

О. Б. Шейнин

Список публикаций

Многие из перечисленных ниже материалов, а также и неопубликованные статьи, см. www.sheynin.de

Историко-математические исследования

1. 1965, О работах Эдрейна в теории ошибок. Вып. 16, с. 325 – 336.

1а. 1975, О появлении дельта-функции Дирака в трудах Лапласа. Вып. 20, с. 303 – 308.
2. 1975, Публикация и примечания к рукописи А. М. Ляпунова О формуле Гаусса для оценки меры точности наблюдений. Там же, с. 319 – 328.
3. 1977, О работах Лапласа по теории вероятностей. Вып. 22, с. 212 – 224. Перевод двух последних параграфов статьи **45**.
4. 1978, Теория вероятностей до П. Л. Чебышева. Вып. 23, с. 284 – 306.
5. 1989, Письма А. М. Ляпунова К. А. Андрееву. Вып. 31, с. 306 – 313.
6. 1990, К истории статистического метода в естествознании. Вып. 32 – 33, с. 384 – 408. Изложение статей **50, 51, 53 – 55**.
7. 1990, Отзыв А. А. Маркова об одной статье Б. Б. Голицына. Там же, с. 451 – 455.
8. 1993, Публикации А. А. Маркова в газете *День*, 1914 – 1915 гг. Вып. 34, с. 194 – 206.
9. 1994, Переписка П. А. Некрасова и К. А. Андреева. Вып. 35, с. 124 – 147. Соавтор М. В. Чириков.
10. 1995, Понятие случайности от Аристотеля до Пуанкаре. Вып. 1 (36), № 1, с. 85 – 105.
11. 1995, Переписка П. А. Некрасова и А. И. Чупрова. Там же, с. 159 – 167.
12. 1997, А. А. Марков и страхование жизни. Вып. 2 (37), с. 22 – 33.
13. 1999, Е. Е. Слуцкий. К 50-летию со дня смерти. Вып. 3 (38), с. 128 – 137.
14. 1999, О работах В. Я. Буняковского по теории вероятностей. Вып. 4 (39), с. 57 – 81.
15. 2000, История теории ошибок. Вып. 5 (40), с. 310 – 332.
16. 2001, Статистика и идеология в СССР. Вып. 6 (41), с. 179 – 198. Статья подверглась правке без нашего ведома и согласия. Полный вариант см. в книге *Российская и европейская экономическая мысль: Опыт Санкт-Петербурга*. 2005. СПБ, 2006, с. 97 – 119. Ред. И. И. Елисеева.
17. 2002, О теоретико-вероятностном наследии Курно. Вып. 7 (42), с. 301 – 316.
18. 2006, О взаимоотношениях П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Вып. 11 (46), с. 148 – 157.
18а. 2007. К истории теоремы Бейеса. Вып. 12 (47), с. 312 – 320.

Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка

19. 1966, К отбору и уравниванию непосредственных наблюдений. № 2, с. 107 – 112.
20. 1967, К истории уравнивания косвенных наблюдений. № 3, с. 25 – 32.

Труды научных конференций
аспирантов и мл. научн. сотрудников
***Инст. Истории естествознания и техники*, Москва**

21. 1965, Ранняя история среднего арифметического. 8-я конференция. Сб. докладов, с. 42 – 46.

22. 1966, К истории итеративных способов решения систем линейных алгебраических уравнений. 9-я конференция, секция истории физ.-мат. наук, с. 8 – 12.
23. 1969, О работе Бейеса по теории вероятностей. 12-я конференция, секция истории мат. и мех., с. 40 – 57.
24. 1972, Конечные суммы случайных величин (исторический очерк). 15-я конференция, та же секция, с. 99 – 141.

История и методология естественных наук

25. 1970, К истории предельных теорем Муавра – Лапласа. Вып. 9, с. 199 – 211.

***Dijalektika.* Beograd**

26. 1972, Математическая обработка измерений у Бошковича. Том 7, с. 75 – 84.

История и математики с древнейших времен до начала XIX в.
Редактор А. П. Юшкевич. М.

27. 1970, Комбинаторика и теория вероятностей. Том 2, с. 81 – 97. Соавторы Л. Е. Майстров, Б. А. Розенфельд.
28. 1972, Теория вероятностей. Том 3, с. 126 – 152. Соавтор Л. Е. Майстров.

Математика XIX в.
Редакторы А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М., 1978.

29. Теория вероятностей, с. 184 – 240. Соавтор Б. В. Гнеденко. Наш перевод этой главы включен в английское издание этой книги (Базель, 1992 и 2001).

Бернулли Якоб, *О законе больших чисел*.
Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1986

30. Якоб Бернулли и начала теории вероятностей, с. 83 – 115.

Вопросы статистики

31. 2001, Письма Елены Чупровой Карлу Пирсону. № 3, с. 62 – 64.
32. 2002, Теория статистики: исторический эскиз. № 9, с. 64 – 69.

Финансы и бизнес

33. 2007, Переписка Е. Е. Слуцкого и В. И. Борткевича. № 4, с. 139 – 154. Соавторы: К. Виттих, Г. Раушер.

Книги

34. *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка*. М., 1990. Наш английский перевод: Гёттинген, 1996.
35. *Гумбель, Эйнштейн и Россия*. Русско-английское издание. М., 2003.
36. *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин, 2005. Английский вариант: Берлин, 2005.
37. *История теории ошибок*. Берлин, 2007. Английский вариант: Эгельсбах, 1996.

Archive for History of Exact Sciences

38. 1971, Newton and the classical theory of probability. Vol. 7, pp. 217 – 243.
39. 1971, Lambert’s work in probability. Там же, с. 244 – 256.
40. 1972, On the mathematical treatment of observations by Euler. Vol. 9, pp. 45 – 56.
41. 1973, Finite random sums. Historical essay. Там же, с. 275 – 305.
42. 1973, Boscovich’s work on probability. Там же, с. 306 – 324. Русский вариант: **26**.

43. 1973, Mathematical treatment of astronomical observations.Vol. 11, pp. 97 – 126.
44. 1974, On the prehistory of the theory of probability. Vol. 12, pp. 97 – 141.
45. 1976, Laplace's work on probability. Vol. 16, pp. 137 – 187.
46. 1977, Laplace's theory of errors. Vol. 17, pp. 1 – 61.
47. 1977, Early history of the theory of errors. Там же, с. 201 – 259.
48. 1978, Poisson's work in probability. Vol. 18, pp. 245 – 300.
49. 1979, Gauss and the theory of errors. Vol. 20, pp. 21 – 72.
50. 1980, On the history of the statistical method in biology. Vol. 22, pp. 323 – 371.
51. 1982, On the history of medical statistics. Vol. 26, pp. 241 – 286.
52. 1983, Corrections and short notes on my papers. Vol. 28, pp. 171 – 195.
53. 1984, On the history of the statistical method in astronomy. Vol. 29, pp. 151 – 199.
54. 1984, On the history of the statistical method in meteorology. Vol. 31, pp. 53 – 93.
55. 1985, On the history of the statistical method in physics. Vol. 33, pp. 351 – 382.
56. 1986, Quetelet as a statistician. Vol. 36, pp. 281 – 325.
57. 1989, Markov's work on probability. Vol. 39, pp. 337 – 377; vol. 40, p. 387.
58. 1991, Poincaré's work in probability. Vol. 42, pp. 137 – 172.
59. 1991, On the work of Buniakovsky in the theory of probability. Vol. 43, pp. 199 – 223. Русский перевод: **14**.
60. 1993, On the history of the principle of least squares. Vol. 46, pp. 39 – 54.
61. 1993, Treatment of observations in early astronomy. Там же, с. 153 – 192.
62. 1994, Gauss and geodetic observations. Там же, с. 253 – 283.
63. 1994, Chebyshev's lectures on the theory of probability. Там же, с. 321 – 340.
64. 1994, Bertrand's work on probability. Vol. 48, pp. 155 – 199.
65. 1995, Helmert's work in the theory of errors. Vol. 49, pp. 73 – 104.
66. 1995, Density curves in the theory of errors. Там же, с. 163 – 196.
67. 1998, Theory of probability; definition and relation to statistics. Vol. 52, pp. 99 – 108.
68. 2003, Nekrasov's work on the central limit theorem. The background. Vol. 57, pp. 337 – 353.

Biometrika

69. 1968, On the early history of the law of large numbers, Vol. 55, pp. 459 – 467.
70. 1970, Daniel Bernoulli on the normal law. Vol. 57, pp. 199 – 202.
71. 1971, On the history of some statistical laws of distribution. Vol. 58, pp. 234 – 236.
72. 1996, A forerunner of the *t*-distribution. Vol. 83, pp. 891 – 898. Coauthor: J. Pfanzagl.

Historia Mathematica

73. 1993, Chuprov, Slutsky and Chetverikov: some comments. Vol. 20, pp. 247 – 254.

74. 1994, Ivory's treatment of pendulum observations. Vol. 21, pp. 174 – 184.
75. 1996, Mendeleev and the mathematical treatment of observations in natural sciences. Vol. 23, pp. 54 – 67.

Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik

76. 1997, Chuprov's early paper on sampling. Bd. 216, pp. 658 – 671.
77. 1998, Statistics in the Soviet epoch. Bd. 217, pp. 529 – 549. Русский вариант: **16**.
78. 1999, Gauss and the method of least squares. Bd. 219, pp. 458 – 467.
79. 2001, Anderson's forgotten obituary of von Bortkiewicz. Bd. 221, pp. 226 – 236.
80. 2003, Social statistics: its history and some modern issues. Bd. 223, pp. 91 – 112.

Historia Scientiarum

81. 1999, The discovery of the principle of least squares. Vol. 8, pp. 249 – 264.
82. 2000, Bessel: some remarks on his work. Vol. 10, pp. 77 – 83.
83. 2001, Pirogov as a statistician. Там же, с. 213 – 225.
84. 2001, Social statistics and probability theory in the 19th century. Vol. 11, pp. 86 – 111.
85. 2001, Gauss, Bessel and the adjustment of triangulation. Там же, с. 168 – 175.
86. 2002, Simon Newcomb as a statistician. Vol. 12, pp. 142 – 167.
87. 2003, Geometric probability and the Bertrand paradox. Vol. 13, pp. 42 – 53.
88. 2003, Mises on mathematics in Nazi Germany. Там же, с. 134 – 146.
89. 2006, Markov's work on the treatment of observations, Vol. 16, pp. 80 – 95.
90. 2007, The true value of a measured constant and the theory of errors. Vol. 17, pp. 38 – 48.

Nature

91. 1966, Origin of the theory of errors. Vol. 211, pp. 1003 – 1004.

Bulletin of the International Statistical Institute

92. 1975, Kepler as a statistician. Vol. 46, pp. 341 – 354.

Mathématiques, informatique et sciences humaines

93. 1991, On the notion of randomness from Aristotle to Poincaré. 29e année, No. 114, pp. 41 – 55. Русский вариант: **10**.

Arabic Sciences and Philosophy

94. 1992, Al-Biruni and the mathematical treatment of observations. Vol. 2, pp. 299 – 306.

Annals of Science

95. 1998, Statistical thinking in the Bible and the Talmud. Vol. 55, pp. 185 – 198.

Mathematical Scientist

96. 2003, On the history of Bayes' theorem. Vol. 28, pp. 37 – 42. Русский вариант: **18a**.

Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin

97. 2002, Sampling without replacement: history and applications. Bd. 10, pp. 181 – 187.
98. 2003, Lies, damned lies and statistics. Bd. 11, pp. 191 – 193.

99. 2007, Markov: integrity is just as important as scientific merits. Bd. 15, pp. 289 – 294.

Rete. Strukturgeschichte der Naturwissenschaften

100. 1972, Daniel Bernoulli's work on probability. Bd. 1, pp. 273 – 300.

British Journal of Mathematical and Statistical Psychology

101. 2004, Fechner as a statistician. Vol. 57, pp. 53 – 72.

Survey Review

102. 1963, Adjustment of a trilateration figure by frame structure analogue. Vol. 17, pp. 55 – 56.

***Dictionary of Scientific Biography.* Редактор C. C. Gillispie. New York**

103. 1970, Anderson, Oskar. Vol. 1, pp. 154 – 155.

104. 1970, Bortkiewicz von, Ladislaus. Vol. 2, pp. 318 – 319.

105. 1973, Krasovsky, Feodosy Nikolaevich. Vol. 7, pp. 496 – 497.

International Encyclopedia of Statistics.
Редакторы W. H. Kruskal, Judith M. Tanur.
New York – London, 1978

106. Kepler, Johannes. Vol. 1, pp. 487 – 488.

Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.
Редактор I. Grattan-Guinness. London – New York, 1994

107. Theory of errors. Vol. 2, pp. 1315 – 1324.

***Storia della scienza.* Редактор S. Petruccioli. Roma, 2002**

108. Lo sviluppo della teoria della probabilità e della statistica. T. 6, pp. 529 – 541.

Leading Personalities in Statistical Sciences.
Редакторы N. L. Johnson, S. Kotz. New York, 1997

109. Achenwall. Pp. 5 – 6.

110. Süssmilch. Pp. 73 – 75. Соавтор J. Pfanzagl.

***Encyclopedia of Statistical Sciences*. Update Volumes.**
Редактор S. Kotz. New York

111. 1997, Lüroth. Vol. 1, pp. 390 – 391. Соавтор J. Pfanzagl. Одновременно опубликовано в *Leading Personalities* … (см. выше), pp. 203 – 204. Все три статьи из этого источника (**109 – 111**) перепечатаны во 2-м издании указанной энциклопедии (2006). Статья **110** ошибочно оказалась там анонимной.

112. 1999, Statistics, definition of. Vol. 3, pp. 704 – 711.

Poisson et la science de son temps.
Редакторы M. Métivier, P. Costabel, P. Dugac. Paris, 1981

113. Poisson and statistics. Pp. 177 – 182.

***General History of Astronomy*, vol. 2B.**
Редакторы R. Taton, C. Wilson. Cambridge, 1995

114. Introduction of statistical reasoning into astronomy. Pp. 191 – 197.

***Statisticians of the Centuries*.**
Редакторы C. C. Heyde, E. Seneta. New York, 2001

115. Gauss. Pp. 119 – 122.

116. Mendel. Pp. 190 – 193.

Euler Reconsidered. Tercentenary Essays
Heber City, Uta, 2007. Редактор R. Baker

117. Euler's work in probability and statistics. Pp. 281 – 316.

Перепечатки статей в
***Studies in the History of Statistics and Probability.* London**

В томе 1, 1970, редакторы E. S. Pearson, M. G. Kendall:
Статья **69**, с. 231 – 239.

В томе 2, 1977, редакторы M. G. Kendall, R. L. Plackett:
Статьи **70, 71** и **100**, с. 101 – 104, 328 – 330 и 105 – 132.

Книги, составленные по различным источникам

Все берлинские книги опубликовало издательство NG

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка 1895 – 1926*. Берлин.

(2006), *История теории вероятностей и статистики в кратких высказываниях.* Берлин. То же, на англ. языке: Берлин, 2006.

Рецензии

Более 20 рецензий в журнале *Новые книги за рубежом*, серии А и В. Темы: уравнивание геодезических построений, библиография геодезической литературы.

Реферирование в реферативных журналах *Геодезия* (1959 – 1967), *Математика* (1967 – 1991), а также более 120 рефератов, многие из них – на книги, в *Zentralblatt für Mathematik = Zentralblatt MATH* с 1986 г.

Большое число рецензий на книги опубликованы в различных журналах, в том числе в *Вопросах истории естествознания и техники*, 2007, № 1, с. 178 – 180 и № 2, с. 191 – 195: на перевод 2006 г. Bernoulli J., *Ars Conjectandi*, 1713, и на Porter T. M. (2004), *Karl Pearson*. Oxford. Эти рецензии впервые появились на англ. языке в *Historia Scientiarum*, в т. 16, № 2, 2006.

Переводы различных авторов

Bomford G. (1958), *Geodesy*. Moscow. С английского.

Христов В. К. (1958), *Координаты Гаусса – Крюгера на эллипсоиде вращения.* М. С болгарского.

Каула В. М. (1966), *Космическая геодезия.* М. С английского.

Gelfond A. O. (1981), *Solving Equations in Integers*. Moscow. С русского.

Nikolsky S. M. (1983), *Elements of Mathematical Analysis.* Moscow. С русского.

Chuprov A. A. (2004), *Statistical Papers and Memorial Publications*. Berlin, 2004. Переводы статей Чупрова и о нем.

Nekrasov P. A. (2004), *The Theory of Probability*. Berlin. Переводы статей автора, в основном о центральной предельной теореме, с последующей дискуссией (А. А. Марков, А. М. Ляпунов), сопутствующие материалы, последующие статьи Маркова и Ляпунова.

Chebyshev P. L. (2005), *Theory of Probability.* Berlin. Перевод издания 1936 г.

Граунт Дж., *Естественные и политические наблюдения над бюллетенями о смертности.* В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской статистики, математики страхового дела*. Берлин, с. 5 – 105.

Bernoulli J. (2005), *On the Law of Large Numbers*. Перевод с существовавших переводов 4-й части латинского текста 1713 г. на немецкий, французский и русский языки с некоторой проверкой по оригиналу.

Бернулли Я. (2006), *Искусство предположений*, ч. 1 – 3. Берлин. Перевод с существовавших переводов латинского текста 1713 г. на немецкий, английский и русский языки с некоторой проверкой по оригиналу.

Probability and Statistics. Russian Papers (2004). Berlin. Эта и две последующие книги – сборники переводов статей различных авторов.
1. Paevsky, V.V. Euler's work in demography. In collected papers *Leonard Euler*. Moscow – Leningrad, 1935, pp. 103 – 110
2. Bernoulli, D. On the mean duration of marriages, etc. (1768). Translated from Russian translation in Ptukha, M.V. *История статистики* (History of Statistics), vol. 1. Moscow, 1955, pp. 453 – 464
3. Ondar, Kh.O. On the works of Davidov in probability theory and on his methodological views. *Istoria i Metodologia Estesvennykh Nauk*, vol. 11, 1971, pp. 98 – 109
4. Gnedenko, B.V. On Ostrogradsky's work in the theory of probability. *Istoriko-Matematich. Issledovania*, vol. 4, 1951, pp. 99 – 123
5. Bernstein, S.N. Chebyshev's work in the theory of probability (1945). In *Собрание сочинений* (Coll. Works), vol. 4. N.p., 1964, pp. 409 – 433
6. Usov, N.A. A remark concerning the Chebyshev theorem. *Matematich. Sbornik*, vol. 2, 1867, pp. 93 – 95 of second paging
7. Bernstein, S.N. The Petersburg school of the theory of probability. *Uchenye Zapiski Leningradsk. Gosudarstven. Univ*., No. 55 (ser. math. sci., No. 10), 1940, pp. 3 – 11
8. Перевод статьи **18**.
9. Перевод статьи **2**.
10. Markov, A.A. The law of large numbers and the method of least squares (1899). *Избранные труды* (Sel. Works). N.p., 1951, pp. 233 – 251.
11. Markov, A.A. The extension of the law of large numbers, etc. [1906 (1907)]. Ibidem, pp. 341 – 361
12. Markov, A.A. The extension of the limit theorems, etc. (1908). Ibidem, pp. 365 – 397.
13. Markov, A.A. An investigation of the general case of trials, etc. (1910). Ibidem, pp. 467 – 507.
14. Markov, A.A. On the coefficient of dispersion (1916). Ibidem, pp. 525 – 535
15. Markov, A.A. On the coefficient of dispersion for small numbers. *Strakhovoe Obozrenie*, No. 2, 1916, pp. 55 – 59
16. The correspondence between A.A. Markov and B.M. Koialovich. Archival letters. Русский текст: см. *Третья хрестоматия* …
17. Linnik, Yu.V., et al, A sketch of the work of Markov, etc. In Markov, A.A. *Избранные труды* (Sel. Works). N.p., 1951, pp. 614 – 642.
18. Markov, A.A.[, Jr], The biography of A.A. Markov [, Sr]. Ibidem, pp. 599 – 613.
19. Перевод статьи **17.**
20. Gnedenko, B.V. A review of the current state of the theory of limiting laws for sums of independent terms. *Uchenye Zapiski Tomsk. Gosudarstven. Pedagogich. Inst.*, No. 1, 1939, pp. 5 – 28.

Probability and Statistics. Russian Papers of the Soviet Period (2005). Berlin.
1. Bernstein, S.N. Mathematical problems of modern biology. *Nauka na Ukraine*, vol. 1, 1922, pp. 13 – 20

2. Bernstein, S.N. Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity (1924). *Собрание сочинений* (Coll. Works), vol. 4. N.p., 1964, pp. 80 – 107
3. Bernstein, S.N. An essay on an axiomatic justification of the theory of probability (1917). Ibidem, pp. 10 – 60
4. Bernstein, S.N. On the Fisherian "confidence" probabilities (1941). Ibidem, pp. 386 – 393
5. Bolshev, L.N. Commentary on Bernstein's paper on the Fisherian "confidence" probabilities. Ibidem, pp. 566 – 569
6. Slutsky, E.E. On the logical foundation of the calculus of probability (1922). *Избранные труды* (Sel. Works). Moscow, 1960, pp. 18 – 24
7. Chetverikov, N.S. The life and work of Slutsky (1959). In author's *Статистические исследования* (Statistical Investigations. Coll. Papers). Moscow, 1975, pp. 261 – 281
8. Romanovsky, V.I. His reviews of R.A. Fisher; official attitude towards him; his obituary

8a. Review of Fisher, R.A., *Statistical Methods for Research Workers.* London, 1934. *Sozialistich. Rekonstruksia i Nauka*, No. 9, 1935, pp. 123 – 127

8b. Review of Fisher, R.A., *The Design of Experiments*. Edinburgh, 1935. *Sozialistich. Nauka i Tekhnika*, No. 7, 1936, pp. 123 – 125

8c. Review of Fisher, R.A., Yates, F., *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 6th edition. New York, 1938. Ibidem, No. 2/3, 1939, p. 106

8d. Sarymsakov, T.A. Statistical methods and issues in geophysics (fragments). *Второе всесоюзное совещание по математической статистике. Ташкент, 1948* (Second All-Union Conference on Mathematical Statistics. Tashkent, 1948). Tashkent, 1948, pp. 221 – 239

8e. Resolution of the Second All-Union Conference on Mathematical Statistics. Ibidem, pp. 313 – 317

8f. The Publisher's Preface to the Russian translation of Fisher, R.A., *Statistical Methods for Research Workers*. Moscow, 1958, pp. 5 – 6

8g. Sarymsakov, T.A. Vsevolod Ivanovich Romanovsky. An obituary. *Uspekhi Matematich. Nauk*, vol. 10, No. 1 (63), pp. 79 – 88

9. Bortkevich, V.I. (L. von Bortkiewicz), Accidents. *Энциклопедич. словарь Брокгауз и Ефрон* (Brockhaus & Efron Enc. Dict.), halfvol. 40, 1897, pp. 925 – 930
10. Anderson, O. Letters to K. Pearson. Unpublished; kept at University College London, Pearson Papers, NNo. 442 and 627/2
11. Mordukh, Ja. On connected trials corresponding to the condition of stochastic commutativity. *Trudy Russk. Uchenykh za Granitsei*, vol. 2. Berlin, 1923, pp. 102 – 125
12. Kolmogorov, A.N. Determining the center of scattering and the measure of precision given a restricted number of observations. *Izvestia Akademii Nauk SSSR*, ser. Math., vol. 6, 1942, pp. 3 – 32
13. Kolmogorov, A.N. The number of hits after several shots and the general principles of estimating the efficiency of a system of firing. *Trudy* [Steklov] *Matematich. Institut Akademii Nauk SSSR*, No. 12, 1945, pp. 7 – 25
14. Kolmogorov, A.N. The main problems of theoretical statistics. An abstract. *Второе всесоюзное совещание по математической статистике. Ташкент, 1948* (Second All-Union Conference on Mathematical Statistics. Tashkent, 1948). Tashkent, 1948, pp. 216 – 220

15. Kolmogorov, A.N. His views on statistics
15a. Anonymous, Account of the All-Union Conference on Problems of Statistics. Moscow, 1954 (extract). *Vestnik Statistiki*, No. 5, 1954, pp. 39 – 95 (pp. 46 – 47)
15b. Anonymous, On the part of the law of large numbers in statistics. [Account of an aspect of the same Conference] (Extract). *Uchenye Zapiski po Statistike*, vol. 1, 1955, pp. 153 – 165 (pp. 156 – 158)

Probability and Statistics. Soviet Essays (2005). Berlin.

1. Bernstein, S.N. The present state of the theory of probability and its applications (1928). *Собрание сочинений* (Coll. Works), vol. 4. N.p., 1964, pp. 217 – 232
2. Khinchin, A.Ya. The theory of probability. In *Наука в СССР за 15 лет. Математика* (Science in the Soviet Union during 15 Years. Mathematics). Editors, P.S.Aleksandrov et al. Moscow – Leningrad, 1932, pp. 165 – 169
3. Kolmogorov, A.N. On some modern trends in the theory of probability. *Труды второго всесоюзного математического съезда 1934г.* (Proc. Second All-Union Mathematical Conference 1934), vol. 1. Leningrad – Moscow, 1935, pp. 349 – 358
4. Khinchin, A.Ya. The theory of probability in pre-revolutionary Russia and in the Soviet Union. *Front Nauki i Tekhniki*, No. 7, 1937, pp. 36 – 46
5. Kolmogorov, A.N. The theory of probability and its applications. In *Математика и естествознание в СССР* (Mathematics and Natural Sciences in the Soviet Union). Moscow, 1938, pp. 51 – 61
6. Kolmogorov, A.N. The role of Russian science in the development of the theory of probability. *Uchenye Zapiski Moskovsk. Gosudarstven. Univ.*, No. 91, 1947, pp. 53 – 64
7. Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N. Theory of probability. In *Математика в СССР за 30 лет* (Mathematics in the Soviet Union during 30 Years). Moscow – Leningrad, 1948, pp. 701 – 727
8. Smirnov,N.V. Mathematical Statistics. Ibidem, pp. 728 – 738
9. Joint bibliography to the two preceding contributions. Ibidem, pp. 739 – 756
10. Kolmogorov, A.N. Theory of probability. In *Математика в СССР за 40 лет* (Mathematics in the Soviet Union during 40 Years), vol. 1. Moscow, 1959, pp. 781 – 795
11. Gikhman, I.I., Gnedenko, B.V. Mathematical statistics. Ibidem, pp. 797 – 808
12. Joint bibliography to the two preceding contributions. Extracted from same source, vol. 2
13. Smirnov, N.V. Mathematical statistics: new directions. *Vestnik Akademii Nauk SSSR*, No. 7, vol. 31, 1961, pp. 53 – 58
14. Kolmogorov, A.N. Issues in the theory of probability and mathematical statistics. Ibidem, No. 5, vol. 35, 1965, pp. 94 – 96
15. Gnedenko, B.V. Theory of probability and mathematical statistics. Introduction. In *История отечественной математики* (History of National Mathematics), vol. 4/2. Editor, I.Z. Stokalo. Kiev, 1970, pp. 7 – 13

Хрестоматии по истории теории вероятностей и статистики
Берлин, 2006 - 2008

Первая хрестоматия (2006)

1. Б. Паскаль, П. Ферма, Переписка, 1654
2. Х. Гюйгенс, Вычисления в азартных играх, 1657

3. И. Ньютон, Рукопись без названия 1664 – 1666, опубл. 1967
4. П. Р. Монмор, *Опыт исследования азартных игр*, Предисловие, 1708
5. Дж. Арбутнот, Довод в пользу Божественного провидения, исходящий из неизменной правильности, наблюдаемой в рождении обоих полов, 1712
6. Н. Бернулли, письмо П. Р. Монмору 1713 г., 1713
7. А. Муавр, *Учение о случае*, Предисловие, Посвящение И. Ньютону, Введение, 1718
8. А. Муавр, Метод аппроксимирования суммы членов бинома и т. д., 1733, латин.; 1738, англ.
9. Т. Симпсон, О пользе выбора среднего из нескольких наблюдений, 1756 и 1757
10. Т. Бейес, Опыт решения задачи из учения о случае, 1764
11. Т. Бейес, Доказательство второго правила из Опыта решения …, 1765
12. И. П. Зюссмильх, *Божественный порядок в изменениях рода человеческого* …, Предисловие, Содержание (аннотированные автором названия параграфов книги), § 14 (Армейский полк на марше)
13. Д. Бернулли, наиболее вероятный выбор из нескольких … наблюдений …, 1778
14. Л. Эйлер, Замечания к предшествующему рассуждению Д. Бернулли, 1778
15. П. С. Лаплас, *Аналитическая теория вероятностей*, Предисловие к изд. 1812 г.
16. С. Д. Пуассон, *Исследование о вероятности приговоров*, Содержание (аннотированные автором названия параграфов книги), и Предисловие, 1837
17. Ф. Найтингейл, *Уход за больными*, Отрывки, 1859
18. Ф. Найтингейл, Замечания о больницах, Отрывки, 1859
19. Ж. Бертран, *Исчисление вероятностей*, Содержание (аннотированные автором названия параграфов книги), 1888

Вторая хрестоматия (2007)

1. Галилео Галилей, Рассуждения об игре в кости, опубл. 1718
2. Блез Паскаль
   I. *Трактат об арифметическом треугольнике с несколькими небольшими трактатами на ту же тему*, опубл. 1665
   II. [Пари], опубл. 1669
3. Христиан Гюйгенс, Переписка, 1656 и 1669, опубл. 1888 и 1895
4. Адриен Мари Лежандр
   I. Метод наименьших квадратов для определения вероятнейшего среднего из результатов различающихся наблюдений, 1814 (перепечатка мемуара 1805 г.)
   II. Анонимная заметка, 1820
5. Пьер Симон Лаплас
   I. Приложение предыдущих исследований к анализу случаев; глава из мемуара 1776 г.
   II. *Лекции по математике*, прочитанные в Нормальной школе в 1795 г., опубл. 1812. Десятая лекция, О вероятностях

III. *Аналитическая теория вероятностей*, 1812. Глава 4-я, О вероятности ошибок средних результатов большого числа наблюдений и о наиболее благоприятных средних результатах
IV. О приложении исчисления вероятностей к наблюдениям и специально к [тригонометрическому] нивелированию, 1819
V. [Выступление в палате пэров], 1814, опубл. 1868
VI. О составлении кадастра, 1817, опубл. 1868
VII. О запрете лотереи, 1819, опубл. 1868
VIII. О том, как присяжные принимают решения, 1821, опубл. 1868

6. Симон Дени Пуассон
I. Реферат статьи П. С. Лапласа (1810), Об аппроксимации формул, которые являются функциями очень больших чисел, 1811
II. Реферат статьи П. С. Лапласа О производящих функциях, определенных интегралах и об их применении к вероятностям, прочтено 1811, опубл. в 1811 г. в ином виде
III. Реферат книги П. С. Лапласа (1812) *Аналитическая теория вероятностей*, 1812
IV. Речь на похоронах маркиза Лапласа, 1827
V. О вероятности средних результатов наблюдений, часть 1-я, 1824
VI. То же, часть 2-я, 1829
VII. Заметка о средних результатах наблюдений, 1830
Приложение (обзор жизни и трудов Пуассона): Б. Брю, 1981

Третья хрестоматия (2007)

1. Готфрид Вильгельм Лейбниц, Опыт новых размышлений о человеческой жизни, рукопись 1680 – 1683, впервые опубл. 1866
2. Даниил Бернулли
2.1. Аноним, О новом исследовании смертности, вызванной оспой, и о выгоде вариоляции для ее предотвращения, 1766
2.2. Даниил Бернулли, Размышления о выгоде вариоляции, 1760
2.3. Даниил Бернулли, Опыт нового исследования смертности, вызванной оспой, и выгоде вариоляции для ее предотвращения, с позже написанным, но одновременно опубликованным Оправдательным предисловием, 1766
3. Жорж Луи Леклерк де Бюффон
3.1. Аноним, без заглавия. Сообщение о работе Бюффона, 1735
3.2. Опыт моральной арифметики (частично), 1777
4. Грегор Иоганн Мендель
Алоис Шиндлер, Памятная речь о прелате Грегоре Иоганне Мендель по случаю открытия мемориальной доски в Хейнцендорфе, Силезии, 20 июля 1902 г. Отпечатано Шиндлером в 1902 или 1903 г., опубликовано в 1965 г.
5. Александр Александрович Марков
5.1. Переписка А. А. Маркова и П. А. Некрасова
5.2. Примыкающие письма
5.3. Материалы об А. А. Маркове
5.4. Материалы о П. А. Некрасове
5.5. Переписка А. А. Маркова с Б. М. Кояловичем и А. М. Ляпуновым

XXXV. Шумпетер Й., Ладислаус фон Борткиевич, 7 авг. 1868 – 15 июля 1831, 1832

XXXVI. Альтшуль Евген, Ладислаус фон Борткиевич, 1931

XXXVII. Лорей Вильгельм, Ладислаус фон Борткиевич, 1932

XXXVIII. Фрейденберг Карл, Ладислаус фон Борткиевич, 7 авг. 1868 – 15 июля 1931, 1931

XXXIX. Тённис Ф., Ладислаус фон Борткиевич, 1868 – 1931, 1932

XL. Шумпетер Й., Г. Ф. Кнапп, 1926

XLI. Струве П. Крупный ученый и хороший человек [С. С. Кон], 1933

XLII. Остроухов П., Памяти С. С. Кона, 1933

XLII. Куницын Н. В., Памяти А. А. Чупрова, 1926 или позже

Пятая хрестоматия (2008)

В. И. Борткевич. Научная биография. О. Б. Шейнин

В. И. Борткевич

I. Закон малых чисел, 1898

II. Теория статистики населения и моральной (рецензия на сборник статей В. Лексиса 1903 г.), 1904

III. Приложение теории вероятностей к статистике, 1904

IV. Вероятность и статистические исследования по Кейнсу (рецензия на трактат Дж. М. Кейнса 1921 г.), 1923

V. К арифметике пропорциональных выборов, 1920

VI. Г. Ф. Кнапп как статистик, 1922

А. А. Чупров

I. Уничтожение сельской общины в России, 1912

II. Мировой рынок после войны, 1922

Другие переведенные и опубликованные отдельно статьи (только основные)

Youshkevich A. P., On the history of the notion of function. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 26, 1977.

Он же, Kolmogorov: historian and philosopher of mathematics. *Hist. Math.*, vol. 10, 1983.

Youshkevich A. P., Rosenfeld B. A., Geometry. *Enc. Hist. Arabic Science*, vol. 2. London – New York, 1996, pp. 447 – 494.

Bernstein S. N. (1947), Chebyshev's influence on the development of mathematics. *Math. Scientist*, vol. 26, 2001, pp. 63 – 73.

Kolmogorov A. N. (1948), Obituary: E. E. Slutsky. *Math. Scientist*, vol. 27, 2002, pp. 67 – 74.

Khinchin A. Ya. (1961)**,** Mises' frequentist theory etc. *Science in Context*, vol. 17, 2004, pp. 391 – 422.

Статья 12: *Math. Scientist*, vol. 30, 2005, pp. 5 – 12.

Переводы собственных статей, помимо указанных выше многие статьи переработаны и дополнены

***Russian Papers on the History of Probability and Statistics*.**

Berlin, 2004

Переводы статей **1, 1a, 4 – 6, 7 – 13, 15, 19, 20, 22, 23, 25**.

***Статьи по истории теории вероятностей и статистики*.**

Берлин

Часть 1-я, 2007. Переводы статей **51, 56, 75, 81 – 83, 92, 94, 95, 97, 99, 100, 109, 110, 112, 116.**

Часть 2-я, 2008. Переводы статей **44, 47, 53, 61, 108**.

Принято к публикации

Карл Пирсон. К 150-летию со дня рождения. В книге *Российская и европейская экономическая мысль: опыт Санкт-Петербурга*. 2008

Romanovsky's correspondence with K. Pearson and R. A. Fisher. *Arch. Intern. Hist. des Sciences*, 2008.

Bortkiewicz' alleged discovery: the law of small numbers. *Hist. Scientiarum*, 2008.