UNIVERSITE DE RENNES I
UER de Mathématiques et Informatique
Campus de Beaulieu
35042 - Rennes Cedex

PUBLICATION DES SEMINAIRES DE MATHEMATIQUES

SEMINAIRE DE PROBABILITES

RENNES 1984

QUELQUES MATERIAUX POUR L'HISTOIRE DE LA THEORIE DES MARTINGALES (1920-1940)

Exposé de Pierre CREPEL le 05.11.1984

.../...

I - INTRODUCTION

Cet exposé, un peu "érudit et technique" n'est qu'une étape pour servir à l'histoire des martingales : l'étape la plus facile pour un mathématicien, celle qui consiste à décrire les aspect explicites du développement de cette notion dans l'entre-deux-guerres. Le travail le plus intéressant reste à faire, on en dira ici seulement quelques mots en remarque.

L'article qui suit est écrit dans des termes familiers aux probabilistes d'aujourd'hui, et nous espérons que, si limité soit-il dans ses ambitions, il pourra leur être utile.

a) Le "corpus classique"

Quand on parle de "martingale" à un mathématicien de ces dernières décennies (éduqué dans l'esprit du livre de J.L. DOOB de 1953, "Stochastic processes"), cela évoque en gros les idées que voici :

Définition : on appelle "martingale" une famille (*) de variables aléatoires (v.a.) (S_t), indexée en général par le temps ($t \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$), adaptée à une famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t$, et telle que

$$E(S_t / \mathcal{F}_s) = S_s \quad \text{p.s.} \quad \text{pour } s \leq t$$

L'exemple le plus classique est celui où $S_n = u_1 + \ldots + u_n$, (u_n) désignant une suite de v.a. indépendantes et centrées.

Mais on pense aussi à d'autres exemples typiques : si S est une v.a. et si $\mathcal{F}_t$ est une famille croissante de tribus, $S_t = E(S / \mathcal{F}_t)$ est une martingale. Il y en a d'autres qui sont devenues classiques, celle qui donne la dérivée d'une mesure, ou bien encore en statistiques le rapport de vraisemblance, etc.

N.B. Toutes les définitions et tous les théorèmes énoncés ici ne sont exprimés ni sous les formes les plus rigoureuses, ni dans leur généralité maximale.

(*) Cette famille est d'ailleurs plutôt notée x(t) : l'exposé fera comprendre simplement cette différence de notation significative.

Le théorème d'arrêt

Soient σ et τ deux temps d'arrêt <u>bornés</u> ($\sigma \leq \tau$), alors $E(S_\tau / \mathcal{F}_\sigma) = S_\sigma$ p.s. (avec des définitions connues).

En d'autres termes, le caractère de martingale d'un processus n'est pas affecté par un temps d'arrêt borné, c'est-à-dire par une section aléatoire du temps tenant compte uniquement de la connaissance du passé. Dit encore autrement, pour un jeu équitable, il n'existe pas de stratégie (c'est-à-dire de façon de miser et de quitter le jeu en tenant compte uniquement des coups passés) qui permette de gagner, du moins lorsqu'on a une fortune finie.

Les théorèmes de convergence

Soit (S_n) une martingale à temps discret. Alors, sous diverses hypothèses exprimant qu'elle n'est pas trop grande, S_n converge p.s. C'est le cas, par exemple, si :

- $\sup_n E S_n^2 < \infty$, ou même si
- $\sup_n E S_n^- < \infty$ (qui inclut notamment le cas de toutes les martingales positives)

Si de plus, la famille (S_n) est équiintégrable, la limite p.s., S_∞, vérifie $E(S_\infty / \mathcal{F}_n) = S_n$ p.s., on dit que la martingale est "fermée".

Les martingales apparaissent comme la notion n° = 1 pour les convergences presque sûres.

Les inégalités

Les théorèmes de convergence reposent en fait sur des inégalités "maximales" dont l'intérêt est d'ailleurs capital en analyse pour l'étude des fonctions harmoniques. En voici un court échantillon. S_n désigne une martingale, λ un nombre positif quelconque.

.../...

- généralisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff :

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} ES_n^2$$

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda} [ES_n^- + ES_1]$$

- l'inégalité de Doob (*)

Soit $[a,b]$ un intervalle. Notons $N = N(a,b)$ le nombre (aléatoire) de passages en montant de la suite (S_n) par dessus $[a,b]$, c'est-à-dire le nombre d'indices $j = j(\omega)$ tels que

$S_{j-1} < a$ et $S_j > b$, alors :

$$E(N) \leq \frac{1}{b-a} E(|S_n| + |a|)$$

- et bien d'autres...

Martingales à temps continu

Les exemples-types de martingales à temps continu sont le mouvement brownien, le processus de Poisson "recentré". D'autre part, si Z_t est un processus de Markov et si h est une fonction harmonique, alors $h(Z_t)$ est une martingale. Lorsque t tend vers l'infini, certaines propriétés de convergence sont analogues à celles du cas discret.

D'autre part, sous des hypothèses de séparabilité, les trajectoires des martingales à temps continu ont des propriétés de régularité remarquables (existence presque partout de limites à gauche et à droite, ect.) sur lesquels nous n'insisterons pas.

Enfin, les martingales servent de base aux théories de l'intégrale stochastique et des équations différentielles stochastiques.

.../...

(*) En fait Doob a démontré de nombreuses inégalités de martingales et l'expression "inégalité de Doob" ne désigne pas la même chose chez tous les auteurs.

Remarques :

Nous arrêterons ici ce rappel semi-informel de "ce qui traîne spontanément dans la tête du probabiliste de base des années 60 à propos des martingales". Voir par exemple [1] ou [2].

Tout le monde n'a certes pas le même jugement sur l'importance relative des divers théorèmes, certains sont plus portés sur l'aspect convergence presque sûre, d'autres sur les inégalités, d'autres encore sur le "calcul stochastique". En tout cas, dans les années 60, le problème de l'extension du "théorème limite central", et d'autres résultats connexes, aux martingales rencontre fort peu d'écho (il y aura évolution dans les années 70, cf. [3]).

Qu'en était-il en 1930 ?

b) Les martingales dans le "folklore" des mathématiciens vers 1920-1930

La "préhistoire" n'est pas ici notre objectif. Nous nous contenterons de quelques observations tirées de l'exposé de B. Bru [4].

- L'idée qu'il est impossible de trouver un système de jeu permettant de gagner lors d'une succession de parties équitables est très ancienne : B. Bru l'a trouvée même dans l'Antiquité, chez Xénophon !

L'astuce qui consiste, dans un jeu de pile ou face équitable, à doubler sa mise après chaque perte et à s'arrêter à la première victoire est également connue depuis longtemps et, en tout cas, nommée "martingale" au moins depuis le 18e siècle (*) (voir par exemple Condorcet : "Eléments du calcul des probabilités", Royez 1805, p. 119).

Les traités sur les jeux de casinos abondent au 19e siècle et décrivent diverses méthodes analogues, laissant entendre plus ou moins clairement qu'on ne peut être sûr de gagner ainsi que si l'on dispose d'une fortune infinie.

.../...

(*) Le mot "martingale" lui-même est plus ancien et employé en des sens divers ; son étymologie est controversée (voir les dictionnaires).

- D'un point de vue plus mathématique, tous "les grands noms" du calcul des probabilités ont étudié des problèmes tels que "la durée du jeu", "la ruine du joueur"..., où l'on peut trouver ce que nous appelerions aujourd'hui des techniques ou méthodes de martingale.

Parmi les plus explicites, citons :

- de Moivre : "De Mensura Sortis"
- Ampère : "Considérations sur la théorie mathématique des jeux" (1802) B.N.
- Ch. Babbage : "An examination of some questions connected with games of chance", Trans. Royal Soc. Edinburgh IX (1820), p. 153-177

Lacroix utilise le mot dans son Traité de Calcul des Probabilités.
On pourrait multiplier les citations, où sont formalisées, sur des jeux précis, les idées du caractère inévitable de la ruine du joueur ayant une fortune finie ou du caractère illusoire de la variation des mises. Mais, même si les principes sont énoncés philosophiquement de manière générale, il ne peut y avoir alors d'énoncés mathématiques généraux : rappelons que ne sont dégagées à ces époques ni la notion de variable aléatoire, ni celle de convergence presque sûre, ni celle d'espérance conditionnelle. (Pour mieux comprendre pourquoi, voir [6]).

Au début du 20e siècle, malgré les travaux de Bachelier(*), Markoff, Borel, Cantelli...., le concept de "martingale" en reste à peu près à ce point, dans la culture des probabilistes.

c) L'ambiance probabiliste des années 1920-1930

Ici encore, il ne s'agit que de points de repère pour la compréhension de la suite et non d'une analyse historique.
H. Cramér [5] définit la décennie 1920-1929 comme une décennie de préparation, et 1930-1939 comme celle des "grands changements".
Le "calcul des probabilités" n'est pas toujours considéré alors comme faisant partie intégrante des mathématiques ; ses charmes un peu flous sont diversement appréciés selon les pays, selon les convictions philosophiques, selon les circonstances de leur utilisation [6] : il y a peu de temps encore, la référence (philosophique et mathématique, contestée ou non) c'était Laplace.

.../...

(*) qui mériteraient une étude à part.